Alıştırmalara yanıtlar

Alıştırma 7. Derste tanımlanan yama kürenin yalnızca $\{z \in S^2 : z > 0\}$ kısmını parametrize etmekte. Yapmamız gereken şey bütün küreyi böyle yamalarla örtmek. Önce $\varphi_- : D^2 \to S^2, (x_1, x_2) \mapsto (x_1, x_2, -\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2})$ parametrizasyonuna bakalım. Bu durumda yükseklik fonksiyonunun kordinatlarda ifadesi ve kritik noktalarını hesaplarsak

$$f \circ \varphi_- = (x_1, x_2) \mapsto -\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$$

ve

$$D(f \circ \varphi_-) = \left(\frac{x_1}{\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}}, \frac{x_2}{\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}} \right)$$

buluruz. Türevin 0 değerini aldığı tek nokta olan $(0, 0)$ noktasında Hessian'ı hesaplayalım:

$$H(f \circ \varphi_-)(0,0) = \begin{pmatrix} \frac{1 - x_2^2}{\sqrt{(1 - x_1^2 - x_2^2)}^{3/2}} & \frac{x_2 x_1}{\sqrt{(1 - x_1^2 - x_2^2)}^{3/2}} \\ \frac{x_2 x_1}{\sqrt{(1 - x_1^2 - x_2^2)}^{3/2}} & \frac{1 - x_2^2}{\sqrt{(1 - x_1^2 - x_2^2)}^{3/2}} \end{pmatrix}_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Henüz kürenin hepsini parametrize etmiş olmadık ama. Şu an kürenin ekvatorunu oluşturan çember az önce tanımladığımız açık komşulukların hiçbiri tarafından kapsanmıyor. Aslında bir küreyi bu tür parametrizasyonlarla tam olarak kaplayabilmek için 6 adet komşuluğa ihtiyacımız var: z^+ yarımküresi, z^- yarımküresi, y^+ yarımküresi, y^- yarımküresi, x^+ yarım küresi, x^- yarım küresi. Bu parametrizasyonlardan birine bakalım: $h : \mathbb{R}^2 \to S^2, (x_1, x_3) \mapsto (x_1, \sqrt{1 - x_1^2 - x_3^2}, x_3)$. Bu y^+ yarım küresinin parametrizasyonudur ve bu parametrizasyonda yükseklik fonksiyonu ve Jacobian'ı

$$f \circ h = (x_1, x_3) \mapsto x_3, \quad D(f \circ h) = (0 \ \ 1)$$

olur.

Dolayısıyla bu parametrizasyonda yükseklik fonksiyonunun hiçbir kritik noktası görünmüyor beklendiği gibi, çünkü bu yama $(1, 0, 0)$ ve $(0, 0, 1)$ noktalarını içermez. Diğer yarım kürelerin parametrizasyonu da aynı sonucu verecektir. Ayrıca S^2'nin pürüzsüz bir manifold yapısı olduğunu göstermek için parametrizasyonlar arasında geçiş fonksiyonlarının da gıcır olduğunu göstermemiz gerekir. Tanımladığımız parametrizasyon fonksiyonlarının tersi kullandığımız düzlemlere (stereografik) izdüşüm şeklinde. Dolayısıyla yapılması gereken tek şey parametrizasyon düzleminden küreye fonksiyon ile çıkmak sonra geçiş yapmak istediğimiz komşuluğa uygun seçeceğimiz izdüşüm fonsiyonu ile parametrizasyon düzlemine geri gitmek. İzdüşüm fonksiyonu ve parametrizasyon fonksiyonu gıcır olacağından, geçiş fonksiyonu da gıcır olacak. Kürenin Hausdorff ve sonlu açık kümeyle kaplanabilir olması ise $\mathbb{R}^3$ten gelen topolojisinde barizdir.

Alıştırma 8. Birim küre için diğer bir olası parametrizasyon küresel kordinatların θ ve ϕ açısını kullanmak. Bu durumda tek bir fonksiyon ve değişik komşuluklar seçilerek S^2 parametrize edilebilir. Herbir yama için fonksiyonları $h_i : U_i \subset \mathbb{R}^2 \to S^2 : (\theta, \phi) \mapsto (\sin\phi\cos\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\phi)$ alalım. Bu durumda komşulukları $U_1 = (0, 2\pi) \times (0, \pi/2)$, $U_2 = (0, 2\pi) \times (\pi/2, \pi)$, $U_3 = (0, \pi) \times (0, \pi)$, $U_4 = (\pi, 2\pi) \times (0, \pi)$, $U_5 = (3\pi/2, \pi/2) \times (0, \pi)$, $U_6 = (\pi/2, 3\pi/2) \times (0, \pi)$ olarak seçebiliriz. Parametrizasyon fonksiyonun tersi $h^{-1} : h(U_i) \subset S^2 \to \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \mapsto (\arctan(y/x), \arccos z)$ şeklinde verilen gıcır bir fonksiyon olduğu için S^2 üzerine pürüzsüz bir manifold yapısı kurmaya yeterlidir.

Bu durumda yükseklik fonksiyonunun herhangi bir komşulukta ifadesi ve Jacobian'ını

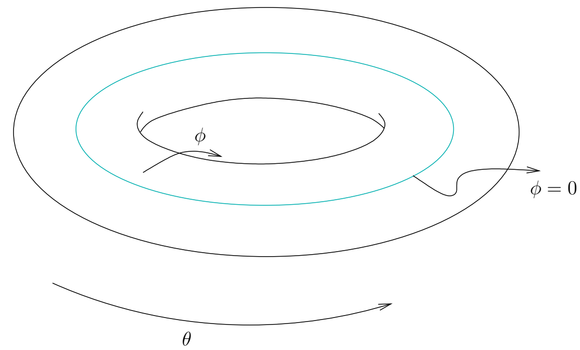
$$f \circ h_i = (\theta, \phi) \mapsto \cos\phi, \quad D(f \circ h_i) = (0 \ \ -\sin\phi)$$

buluruz. Dolayısıyla yükseklik fonksiyonunun kritik noktaları $\sin\phi = 0$ eşitliğini sağlamalı yani kürenin kuzey ve güney kutupları $\phi = 0$, $\phi = \pi$ kritik noktalar olmalı. Bu alıştırma, metindeki tartışmayla birlikte, kritik noktaların parametrizasyondan bağımsız olduğuna işaret ediyor.

Alıştırma 10. Simit, $T^2 = S^1 \times S^1$ olarak düşünülebilir. Varsayalım ki ilk çemberin yarıçapı a, diğerinin b olsun. Sabit çemberin açısı θ diğeri üzerinde döndürülen çemberin açısı da ϕ olsun. ϕ açısı için $\phi = 0$ simitin tepesine, $\phi = \pi$ ise simitin dibine gelecek şekilde düşünelim (Şekil 19). O zaman istediğimiz parametrizasyon fonksiyonu

$$f : (\theta, \phi) \mapsto (a\cos\theta + b\sin\phi\cos\theta, a\sin\theta + b\sin\phi\sin\theta, b\cos\phi)$$

olacak. Simidin bir noktasının z değerinin $b\cos\phi$ olduğunu görmek kolay. x ve y değerlerini görmek içinse önce $(0, 0, 0)$ noktasından simit üzerindeki herhangi bir noktaya bir vektör çizin. Simide tepeden baktığınız zaman bu vektörün boyu $(a+b\sin\phi)$ olacağından bunların x ve y eksenlerine izdüşümünü bulmak kolay. Son olarak Alıştırma 8'in çözümünde küreye yaptığımız gibi,



Şekil 19:

simidi kaplayacak komşuluklar bulmamız lazım. Bu durumda dört tane komşuluk yeterli olacaktır: $U_1 = (0, 2\pi) \times (0, 2\pi)$, $U_2 = (-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi)$, $U_3 = (-\pi/2, 3\pi/2) \times (0, 2\pi)$ ve $U_4 = (-\pi/2, 3\pi/2) \times (-\pi, \pi)$.

O zaman koordinatlarda yazılmış yükseklik fonksiyonu ve Jacobian'ı

$$h : (\theta, \phi) \mapsto b\cos\phi, \quad J = (0 \quad -b\sin\phi)$$

olur. Dolayısıyla Jacobian'ın sıfır değerini aldığı yerler $\phi = 0$ ve $\phi = \pi$ noktaları yani simidin tepesi ve dibi oluyor (Şekil 19). Hessian matrisini de $\phi = 0$ noktalarında $H_{11} = -1$ ve diğer girdileri sıfır olan, $\phi = \pi$ noktalarındaysa $H_{11} = 1$ ve diğer girdileri sıfır olan bir matris olarak buluruz. Kürede yaptığımız yorumu simide de yaparsak, simidin tepesine bir su damlası bıraktığımız zaman sadece tek bir taban vektörü yönünde aşağı doğru akabilir, diğer yönde hareket edemez, simidin tepesinde kalır. Küreden farklı olarak bir tane sıfırdan farklı ve bir tane de sıfır köşegen girdisinin sonucudur bu.

Alıştırma 11. İpucu: Sonsuz tane kritik nokta alın. Bunlar yalıtılmış oldukları için etraflarında birbiri ile kesişmeyen açık komşuluklar vardır. Daha sonra dışarısını da uygun bir biçimde açık komşuluklarla kaplayıp bunun sonlu bir açık alt örtüsü olmadığını gösterin.

Plan, sonsuz tane birbirinden yalıtılmış kritik nokta etrafında aldığımız kesişmeyen açık kümeleri bir tıkız topolojik uzay içersine sığdıramayacağımızı göstermek. M tıkız topolojik bir uzay, $\{p_\alpha\}$ da kritik noktalar kümesi olsun. Bunlar yalıtılmış olduğu için herbiri etrafında diğer hiçbir kritik noktayı içermeyen U_α açık kümeleri alalım. Bunlar açık örtünün ilk üyeleri. Şimdi kalan $M \setminus (\cup U_\alpha)$ kısmını dikkatli bir şekilde kaplayacağız. Her açık U_α kümesinin içersinde kritik noktaların etrafında içleri boş küme olmayan (niye?) V_α kapalı kümesi alabiliriz. V_α'ların içlerinin birleşiminin kapanışına S diyelim. $M \setminus S$ açıktır ve $M \setminus \cup U_\alpha$ kümesini kapsar. Artık $\{S\} \cup \{U_\alpha\}$, M için bir açık örtü olur. Fakat bu açık örtü içersinde $\{U_\alpha\}$'lardan hiçbirini çıkaramayacağımız için M'nin tıkız olmasıyla çelişiriz.

Alıştırma 17. İpucu: Bu manifold üzerinde Morse olan bir fonksiyon tanımlayıp, Teorem 11'i kullanarak bu manifoldun $f^{-1}(a) \times [a,b]$'ye difeomorf olduğunu gösterin. Bu yüzeyin silindir ile ilişkisinin görmek için düzlemi tanımlayan denklemleri yazıp, bu denklemleri çözerek çember denklemine benzer denklemler elde etmeyi deneyin.

$z_1 = (x_1, y_1)$ ve $z_2 = (x_2, y_2)$ olsun. O zaman sorudaki koşulu sağlayan kompleks sayıların oluşturduğu A yüzeyi şu iki denklem tarafından belirlenir:

$$(i)\ h(z_1, z_2) = x_1x_2 - y_1y_2 = 1, \quad (ii)\ g(z_1, z_2) = x_1y_2 + x_2y_1 = 0.$$

Bu denklemler bize $\mathbb{C}^2$ içersinde 2 boyutlu bir A yüzeyi verecek. Öncelikle ilersi için lazım olacak bir koşulu şimdiden fark etmekte yarar var. Eğer $x_1 = 0$ olursa bu $x_2y_1 = 0$ ve $y_1y_2 = -1$ demek olacak; bu da $x_2 = 0$ ve $y_1 \neq 0$, $y_2 \neq 0$ koşulunu doğuracak. Dolayısıyla $x_1 = x_2 = 0$ olduğu durumda y_1 ve y_2 sıfır olamayacak. Aynı şekilde $y_1 = y_2 = 0$ olduğundaysa x_1 ve x_2 sıfır olamayacak.

Şimdi A'nın bir silindire nasıl homeomorf olabileceği hakkında sezgi edinmek için denklem (ii)'yi çözüp (i)'in içine koymayı deneyelim:

$$x_1 \neq 0, x_2 \neq 0 : \ y_2 = -x_2y_1/x_1$$

$$y_1 \neq 0, y_2 \neq 0 : \ x_2 = -x_1y_2/y_1$$

olacak. Paydaların birlikte sıfır olduğu bir durum olamayacağı için yalnızca bu iki denklem bize yeterli. Bunları denklem (i)'in içine koyarsak sırayla elde edeceğimiz denklemler:

$$(iii)\ x_1 \neq 0, x_2 \neq 0 : x_1^2 + y_1^2 = x_1/x_2, \quad (iv)\ y_1 \neq 0, y_2 \neq 0 : x_1^2 + y_1^2 = -y_1/y_2.$$

Bunlar düzlemde çember denklemine oldukça benziyor. Ayrıca burda fark ettiğimiz bir koşul da y_1 ve y_2'nin işaretlerinin birbirinden farklı olması gerektiği çünkü (iv)'ün sol tarafı her zaman pozitif. Şimdi öyle bir f fonksiyonu tanımlamalıyız ki bir $c \in \mathbb{R}$ için $f^{-1}(c)$ ve yukardaki denklemlerle tarif edilen kümelerin kesişimi bize bir çember vermeli. Aynı zamanda Teorem 11'i kullanabilmemiz için, yani elimizdeki A yüzeyini $S^1 \times [a, b]$ olarak ifade edebilmek için f'nin yüzey üzerinde kritik noktası olmaması lazım. (iii) ve (iv)'e bakınca iki tane aday makul gözülebilir; birincisi $f(z_1, z_2) = x_2 - x_1$, diğeriyse $f(z_1, z_2) = x_2 x_1$. Bu iki fonksiyonun da bir c için geri görüntüsünün yukardaki yüzeyle kesişimi bize çember verecek; bunu en aşağıda göreceğiz. Şimdi $f(z_1, z_2) = x_2 - x_1$ fonksiyonunun yüzey üzerinde kritik bir noktası olmadığını göstereceğiz. Bunun için bir kaç yol var. Bunlardan biri yüzeyi parametrize etmek ve fonksiyonun Jacobian'ını incelemek. Ama zaten amacımız yüzeyin $S^1 \times [a, b]$ manifolduna difeomorf olduğunu göstermek. Dolayısıyla bu sefer daha önceki derslerde bahsettiğimiz bir yolu kullanacağız. Eğer f'nin bu yüzey üzerinde kritik noktası varsa orada f'nin bir sabit değer yüzeyi, A'ya teğet olmalı. Bunun olması için öyle bir $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} - \backslash\{0\}$ olmalı ki

$$\alpha \nabla h + \beta \nabla g = \gamma \nabla f \Leftrightarrow \alpha(x_2, -y_2, x_1, -y_1) + \beta(y_2, x_2, y_1, x_1) = \gamma(-1, 0, 1, 0)$$

sağlansın. Bu denklemleri çözdüğümüz zaman $y_2 = -y_1 = -\frac{\gamma\beta}{\beta^2+\alpha^2}$ ve $x_2 = -x_1 = \frac{\gamma\alpha}{\beta^2+\alpha^2}$ buluruz. Ama bu $x_1 y_2 + x_2 y_1 = 0$ denklemini ancak $x_1 = x_2 = y_1 = y_2 = 0$ için sağlayabilir bu da olası değil. Dolayısıyla f fonksiyonunun bu yüzey üzerinde hiçbir kritik noktası yoktur.

Şimdi f fonksiyonunun bir değer için geri görüntüsüne bakıp bunun bir çember olduğu görülmeli. Size bırakıyoruz.

Alıştırma 23. Şu teoremleri kullanın: *Yerel olarak tıkız kümeleri tıkız kümeler içersine gömmek mümkündür. Hausdorff uzaylarda bir nokta ve bir tıkız kümeyi ayıran ve kesişmeyen iki açık küme vardır. Hausdorff tıkız uzayların kapalı alt kümeleri tıkızdır. Her tıkız küme kapalıdır.*

Bizim çalıştığımız manifoldlar topolojik olarak Hausdorff ve yerel olarak $\mathbb{R}^n$'ye homeomorf oldukları için, yerel olarak da tıkızdırlar, dolayısıyla bu teorem manifoldlar için de geçerlidir. Bu soruyu çözerken bir teorem kullanacağız. M Hausdorff ve yerel olarak tıkız bir uzay olsun. O zaman bu uzayı öyle tıkız bir uzay $\dot{M}$ içersine gömebiliriz ki $\dot{M} \setminus M$ tek bir noktadan oluşan bir küme olur. Bu $\dot{M}$ uzayına M'nin *tek nokta ile tıkızlaştırılması* denir

Şimdi $p \in M$ ve $U \subset M$, p etrafında açık bir küme olsun. Amacımız bu açık küme içersinde kapanışı tıkız olan başka bir açık küme bulmak. Öncelikle, $K = \dot{M} \setminus U$ kapalı bir kümedir. Tıkız Hausdorff uzaylarda kapalı alt kümeler tıkız olduğu için K tıkızdır. Hausdorff uzaylarda bir nokta ve tıkız bir kümeyi birbirinden ayıran ve kesişmeyen iki tane açık küme bulunabilir. O zaman p'yi ve K'yi içeren ayrık açık kümeler sırasıyla W ve Y olsun. $W \subset \dot{M}$ olduğu için kapanışı $\overline{W}$ tıkızdır. Öte yandan W ve Y ayrık kümeler olduğu için de $\overline{W}$, K ile kesişmez. Dolayısıyla $\overline{W} \subset U$.

Alıştırma 24. İpucu: $e^{-1/t}$ tarzı bir fonksiyon kullanın.

Bu fonksiyonu analitik bir şekilde inşa etmemiz mümkün değildir çünkü bir komşuluk içersinde her yerde sıfır değerini alan bir fonksiyon, analitikliğinden gelen seri açılımı nedeniyle komşuluğun çevresinde ve böyle böyle tanımlı olduğu her yerde sıfır değerini almak zorunda kalacaktır. Ama manifoldumuz analitik olmadığı zaman şapka fonksiyonu gerçel değerli $e^{-1/x}$ veya $e^{-1/(1-x^2)}$ gibi fonksiyonlar yardımı ile kurulabilir. İlk önce şöyle bir fonksiyon yaratacağız:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} e^{-1/x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

f'nin gıcır olmama riskini taşıdığı tek nokta $x = 0$ noktası. Öncelikle tümevarım ile fonksiyonun n'inci türevinin aşağıdaki gibi verildiğini görmek olası:

$$f^{(n)}(x) = p_n(x)\frac{e^{-1/x}}{x^{2n}}$$

Burda $p_n(x)$ bir polinom. x, sıfıra giderken $p_n(x)$ sabit bir sayıya, $\frac{e^{-1/x}}{x^{2n}}$ ise sıfıra gider.

Şimdi $F(t) = \frac{f(2-x)}{f(2-x)+f(x-1)}$ fonksiyonuna bakalım. Bu fonksiyon $x \leq 1$ için $\frac{f(2-x)}{f(2-x)} = 1$, $(1, 2]$ aralığında 1 ile 0 arasında, $x > 2$ içinse 0 değerini alan bir gıcır fonksiyondur. Paydası sıfır değerini asla almaz çünkü $f(2-x)$ ve $f(x-1)$ aynı anda sıfır olamaz ve ikisi de her zaman pozitif değer alır. O zaman şapka fonksiyonunu şöyle tanımlayabiliriz:

$$H : \mathbb{R}^n \to [0, 1], \quad H(x-p) = F(|x-p|)$$

Bu durumda H fonksiyonu p etrafındaki kapalı birim diskte 1 değerini, 2 yarıçaplı kapalı diskle ve birim disk arasında kalan bölgede 1 ile 0 arasında bir değeri ve bu 2 yarıçaplı diskin dışında sıfır değerini alan gıcır bir fonksiyondur.
Alıştırma 25.
Simetri: Eğer $(h, v)_p$ bir teğet vektör ise o zaman denklik ilişkisinin tanımından

$$D(h^{-1} \circ h)(h^{-1}(p))v = \mathrm{br}_{T_pM}(v_{h^{-1}(p)}) = v$$

olduğundan $(h,v)_p \sim (h,v)_p$ buluruz.

Yansıma: $(h,v)_p \sim (g,u)_p$ olsun. $D(h^{-1}\circ g)(g^{-1}(p))v = u$ olduğundan

$$\begin{array}{rcl} D(g^{-1}\circ h)(h^{-1}(p))u & = & D(g^{-1}\circ h)(h^{-1}(p)) \circ D(h^{-1}\circ g)(g^{-1}(p))v \\ & = & D(g^{-1}\circ h \circ h^{-1} \circ g)(g^{-1}(p))v \\ & = & \mathrm{br}_{T_pM} v = v \\ & \Rightarrow & (g,u)_p \sim (h,v)_p \end{array}$$

Geçişkenlik: $(h,v)_p \sim (g,u)_p$ ve $(g,u)_p \sim (f,w)_p$ olsun. O zaman

$$\begin{array}{rcl} D(f^{-1}\circ h)(h^{-1}(p))v & = & D(f^{-1}\circ g \circ g^{-1} \circ h)(h^{-1}(p))v \\ & = & D(f^{-1}\circ g)(g^{-1}(p)) \circ D(g^{-1}\circ h)(h^{-1}(p))v \\ & = & D(f^{-1}\circ g)(g^{-1}(p))u = w \\ & \Rightarrow & (h,v)_p \sim (f,w)_p. \end{array}$$

Alıştırma 29. (1) Derste $\frac{\partial}{\partial x_i}(fg) = f\frac{\partial g}{\partial x_i} + g\frac{\partial f}{\partial x_i}$ olduğunu göstermiştik. O zaman bundan yola çıkarak $r \in \mathbb{R}$'yi M üzerinde sabit değerli bir fonksiyon olarak görürsek $\frac{\partial}{\partial x_i}(rg) = r\frac{\partial}{\partial x_i}(g) + 0$ olduğunu söyleyebiliriz.
(3) h, p çevresinde bir parametrizasyon, $h(p) = p'$ olsun.

$$\begin{array}{rcl} \frac{\partial}{\partial x_i}(f+g)(p) & = & \frac{\partial}{\partial x_i}(f\circ h(p') + g\circ h(p')) \\ & = & \frac{\partial}{\partial x_i}(f\circ h(p')) + \frac{\partial}{\partial x_i}(g\circ h(p')) \\ & = & \frac{\partial}{\partial x_i}f(p) + \frac{\partial}{\partial x_i}g(p). \end{array}$$

Alıştırma 30. Önce $l(1) = 0$ olduğunu göstereceğiz. Bunun için yine 1'i manifold üzerinde sabit 1 değerli fonksiyon olarak alırsak

$$l(1) = l(1\cdot 1) = 1\cdot l(1) + 1\cdot l(1) = 2l(1) \Rightarrow l(1) = 0.$$

O zaman derivasyon olmanın birinci özelliğini kullanarak $l(c) = l(1\cdot c) = c\cdot l(1) = 0$ buluruz.

Alıştırma 33. Bunun için daha önceki Alıştırma 7'nin çözümünde tanımladığımız parametrizasyonları kullanabiliriz. Yükseklik fonksiyonunun kritik noktalarının kuzey ve güney yarım kürede olduklarını biliyoruz. O noktalarla başlayalım. Kuzey yarım küre için

$$h_1 : D^2 \to S^2,\ (x,y) \mapsto (x, y, \sqrt{1-x^2-y^2})$$

parametrizasyonunda

$$f \circ h_1 = (x, y) \mapsto \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

olarak çalışan yükseklik fonksiyonunun gradyanı

$$\nabla(f \circ h_1) = (\frac{-x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}, \frac{-y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}})$$

bulunur.

Verilen $(0, 0, 1)$ vektörünün $(x, y, z) \in S^2$ noktasındaki teğet düzleme izdüşümü,

$$(0, 0, 1) - ((0, 0, 1) \cdot (x, y, z))\,(x, y, z) = (-x, -y, 1 - z^2)$$

olarak bulunur. Bu vektörün h_1 parametrizasyonunun tersinin türeviyle aşağıya indiği vektör $X(x, y) = (-x, -y)$ olur. Bu X vektör alanının f için gradyanımsı olması için, kritik noktalardan uzakta, $X(f) > 0$ sağlanmalı:

$$X(f) = \nabla f \cdot X = \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} + \frac{y^2}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} > 0.$$