Ders 1: Önbilgiler

Bu derste türev fonksiyonunun geometrik anlamını tartışıp, yalnız $\mathbb{R}^n$'nin bir açık altkümesinde değil, daha genel uzaylarda tanımlı bir fonksiyonun türevi ve özel noktalarının nasıl olduğu konusunda sezgi geliştireceğiz. Burası için iyi bir kaynak [Spi2]'nin ilk sayfaları.

Şimdi, analiz altyapısı ve geometrik sezgiye dayanarak yapılan tartışmalardaki matematiksel boşluklar daha sonraki derslerde doldurulacak. Bu yüzden, ilk dersi okurken gelmekte olan kuramı hissetmeye çalışın. Boşluklar ileriki derslerde doldurulacak.

Eğer bir topolojik uzayın açık her örtüsünün, yine açık örtü olacak bir sonlu altörtüsü varsa bu topolojik uzaya *tıkız* diyoruz.

Teorem 1. *A tıkız bir topolojik uzay ve $f : A \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda f fonksiyonunun A'da minimum ve maksimum değerleri (ve A'da bu değerlere ulaştığı noktalar) vardır.*

Alıştırma 1. *Teoremi kanıtlayın.*

Teorem 2. *A ve B iki topolojik uzay, $f : A \to B$ sürekli bir fonksiyon olsun. A tıkızsa $f(A)$ da tıkızdır. Eğer A bağlantılı bir uzaysa, $f(A)$ da bağlantılı bir uzaydır.*

Alıştırma 2. *Teoremi kanıtlayın.*

1.1 Türev

Morse teorisi manifoldlar üzerinde tanımlanmış türevlenebilir fonksiyonlarla ilgilenir. Türevin bir operatör, bir fonksiyonun bir noktadaki türevinin ise uygun vektör uzayları arasında doğrusal bir dönüşüm olarak benimsenmesi bizim için önem taşıyacak. Bu konuda önce birkaç örnek inceleyelim. Kullanılan kavramların iyi tanımlarını sonra konuşacağız.

Örnek 1: Kafaları karıştırmak için, $\mathbb{R}_1$ ve $\mathbb{R}_2$ diye iki topolojik uzay alalım, ikisi de aslında $\mathbb{R}$'nin kopyaları olsun. $f : \mathbb{R}_1 \to \mathbb{R}_2, f(x) = x^2$ olarak tanımlanan fonksiyon süreklidir. Herhangi bir $x_0 \in \mathbb{R}_1$ noktasında bu fonksiyonun türevinin $2x_0$ olduğu söylenir. Fonksiyonun x_0'daki Taylor açılımının ilk iki terimi $f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)$ verir; yani x noktası x_0'a yeterince yakınken

$f(x)$ bu iki terimin toplamı aracılığıyla istenenden daha iyi yakınlaştırılabilir. Bu ifadedeki ikinci terimde türev ile x_0'dan uzaklık çarpılıyor. Bu ne demek? Şöyle düşünelim: $f(x)$ yaklaşık olarak $f(x_0)$'dan $(x - x_0)$ uzaklığının bir katı kadar değişiyor. x_0'da $x - x_0$ *vektörü* kadar gidersek görüntü bunun $f'(x_0)$ katı bir *vektör* kadar değişiyor.

Bu gözlem bizi türevi bir fonksiyondan çok vektörler arası bir gönderim olarak görmeye zorluyor. Öncelikle, f'nin x_0'daki türevini $Df(x_0)$ olarak göstereceğiz. Bu durumda,

$$\begin{array}{rcl} Df(x_0) : T_{x_0}\mathbb{R}_1 & \to & T_{f(x_0)}\mathbb{R}_2 \\ a & \mapsto & 2x_0 a \end{array}$$

olacak. Burada $T_{x_0}\mathbb{R}_1$ ifadesi, x_0 noktasındaki olası tüm vektörlerin uzayını anlatıyor. Bu uzaya $\mathbb{R}_1$'in x_0 noktasındaki *teğet uzayı* diyeceğiz. Bu durumda a, $\mathbb{R}_1$'in x_0'daki teğet uzayından bir vektör, $2x_0a$ ise $\mathbb{R}_2$'nin $f(x_0)$'daki teğet uzayından bir vektör oluyor.

Bu işlemi açık ama gereksiz bir şekilde yazarsak vektörlerimiz 1 boyutlu sütun vektörleri, $Df(x_0)$ ise 1×1 boyutlu bir matris olur:

$$[2x_0]_{1\times 1} \cdot (a) = (2x_0 a).$$

Burada *türev matrisini* köşeli parantez, vektörleri yuvarlak parantezle gösterdik ve $\mathbb{R}$'deki standart tabanı kullanarak bunları yazdık. $\square$

Örnek 2: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = x + y^2$ sürekli bir fonksiyondur. Herhangi bir $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ noktasında f'nin türevi

$$\begin{array}{rcl} Df(x_0, y_0) : T_{x_0,y_0}\mathbb{R}^2 & \to & T_{f(x_0,y_0)}\mathbb{R} \\ (a, b) & \mapsto & [a + 2y_0 b] \end{array}$$

olacak. İşlemi açık bir şekilde (ama artık gereksiz değil!) yazarsak

$$[1 \ \ 2y_0] \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = (a + 2y_0 b)$$

olur. $\mathbb{R}^2$'nin (x_0, y_0) noktasındaki (a, b) *hız* vektörü, $\mathbb{R}$'nin $f(x_0, y_0)$ noktasındaki bir *hız* vektörüne gönderilmiş oldu. $\square$

Örnek 3: $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y, z) = (u(x, y, z), v(x, y, z)) = (2xy, y + xz^2)$ gönderimi süreklidir. Bu gönderimin herhangi bir $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ noktasındaki türev dönüşümü

$$\begin{array}{rcl} Df(x,y,z) : T_{(x,y,z)}\mathbb{R}^3 & \to & T_{f(x,y,z)}\mathbb{R}^2 \\ (a,b,c) & \mapsto & (2ya+2xb, z^2a+b+2xzb) \end{array}$$

olarak bulunur. $\mathbb{R}^3_1$ ve $\mathbb{R}^3_2$'ün standart tabanlarında bu ifade şöyle de yazılabilir:

$$\begin{pmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y & 2x & 0 \\ z^2 & 1 & 2xz \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2ya+2xb \\ z^2a+b+2xzb \end{pmatrix}.$$

Görüldüğü gibi şimdi f'nin bir noktadaki türevi, 3 boyutlu bir vektör uzayından 2 boyutlu bir vektör uzayına doğrusal bir dönüşüm olarak çalışıyor. □

Tanım 1. *$\mathbb{R}^n$'de açık bir A kümesi için, $f : A \to \mathbb{R}^m$ sürekli bir gönderim olsun. O zaman $p \in A$ noktasında f'nin türevi $Df(p)$ olarak gösterilir ve $Df(p) : T_pA \to T_{f(x)}\mathbb{R}^m$ olmak üzere iki teğet (vektör) uzayı arasında bir dönüşümdür. Kalkış ve varış teğet uzaylarında verilen tabanlara göre yazılmış matris gösterimine* türev matrisi *denir. Tabanların ne olduğu anlaşıldığı sürece bu matrise* f'nin p'de türevi *de diyeceğiz.*

f'nin türevinin (türev matrisinin) rankının olası en yüksek $\max(m,n)$ *değere sahip olduğu durumda türeve* tam rank *denir. Türevin tam rank olmadığı noktalara* kritik nokta *denir. Herhangi bir kritik noktanın f altında görüntüsüneyse* kritik değer *denir.* □

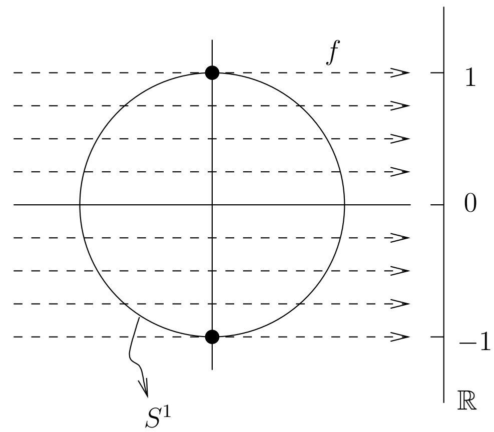
1.2 Kritik noktalar

Tanım gereği, kritik bir noktada fonksiyonun türevinin çekirdeği 0'dan farklı vektörleri de içerir. Birkaç örneğe daha bakalım.

Örnek 4: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto 3y$ sürekli fonksiyonunun türevi $Df(x,y) = [0\ 3]_{1x2}$ olduğundan rankı her zaman 1'dir yani tam ranktır. Dolayısıyla f'nin kritik noktası yoktur. □

Örnek 5: Kompleks yapıyla donatılmış düzlemde ($\mathbb{C}$) birim çemberi S^1 ile gösterip, $f : S^1 \to \mathbb{R}$, $e^{i\theta} \mapsto \sin\theta$ gönderimini düşünelim.

Bu gönderim, S^1 üzerindeki bir noktayı ikinci bileşenine götüren bir *yükseklik fonksiyonudur.* S^1 tıkız olduğundan, Teorem 1 sayesinde f'nin S^1'de maximum ve minimum değerlerini aldığı noktaların var olduğunu biliyoruz. Şekil 1'e



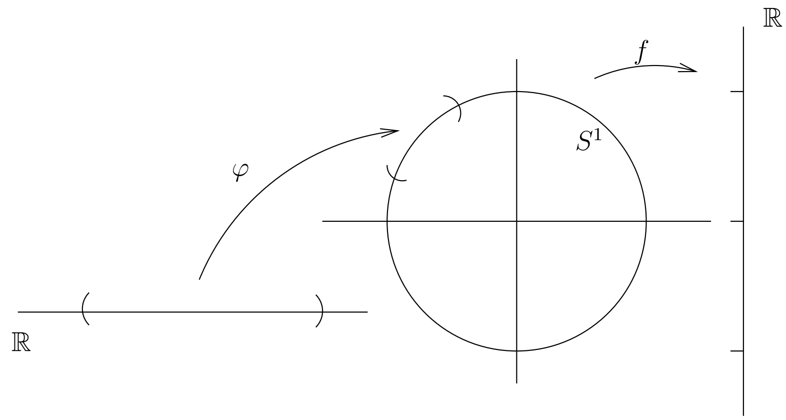
Şekil 1: Çemberde bir yükseklik fonksiyonu ve en az/fazla değerleri

bakacak olursak f'nin maximum noktasının $(0,1)$, minimum noktasının $(0,-1)$ olduğunu hissederiz. f gönderiminin *türevini* (tabii ki S^1 üzerinde) alabilmeli ve bu iki noktayı kritik nokta olarak bulabilmeliyiz, en azından planımız bu. Ancak f gönderiminin kalkış kümesi $\mathbb{R}^2$'de açık bir küme değil, tıkız S^1 kümesi. Bu tür kümeler üzerinde türev almayı henüz bilmiyoruz. Şöyle yapalım: S^1'i, $\theta \in (0, 2\pi)$ olmak üzere θ ile *parametrize* edelim: $\theta \mapsto x_\theta = (\cos\theta, \sin\theta) \in S^1 - \{(0,1)\}$. Yükseklik fonksiyonu şimdi $\theta \mapsto (\cos\theta, \sin\theta) \mapsto \sin\theta$ olarak çalışıyor. Dolayısıyla türevi $[-\cos\theta]$'dır ve böylece kritik noktaları $\theta = \frac{\pi}{2}$ ve $\theta = \frac{3\pi}{2}$ olur. Bunlara karşılık gelen S^1 noktaları da tam beklediğimiz gibi $(0,1)$ ve $(0,-1)$ noktalarıdır. Tekrar edersek, bu örnekte kullanılan tek fonksiyon yükseklik fonksiyonu değil; zorunlu olarak S^1 *manifoldunu* parametrize eden bir φ fonksiyonunu da kullandık. Böylece elde ettiğimiz $f \circ \varphi$ bileşke fonksiyonu $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$'ye, $\theta \mapsto \sin\theta$ olarak çalıştı. $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$'ye fonksiyonun türevini almasını bildiğimizden işi bitirdik[2]. □

Dolayısıyla aslında çember gibi *güzel* bir $X \subset \mathbb{R}^n$ altuzayı ve üzerinde yeterince *güzel*, gerçel değerli bir f fonksiyonu varsa, f'nin türevini almak için şu yola başvuruyoruz: X'in herhangi bir p noktasının bir $U \subset X$ komşuluğunda f'nin türevini tanımlayabilmek için önce X veya en azından o komşuluğu, diyelim $\varphi : V \subset \mathbb{R}^k \to U$ ile, parametrize edebilmemiz gerekecek (bkz.

[2]Bir nokta hariç! φ parametrizasyonu $(1,0)$ noktasını ıskalıyor. Bunu daha sonra düşüneceğiz.

Şekil 2). Bu tür X uzaylarına *manifold* diyeceğiz. O zaman bu iki fonksiy-



Şekil 2: Çemberin bir parçasının parametrizasyonu

onun bileşkesi $f \circ \varphi : V \to \mathbb{R}$ olacak ve $p' = \varphi^{-1}(p) \in V$ noktasında türevi sanki

$$D(f \circ \varphi)(p') = Df(p) \circ D\varphi(p')$$

gibi bir zincir kuralını sağlayacak. Böylece aslında f fonksiyonunun X'te kritik noktaları, $f \circ \varphi$'nin kritik noktalarına karşılık gelecek. Aynı zamanda manifoldu inşa etmekte kullandığımız φ fonksiyonunun da tersi olan bir fonksiyon olmasını isteyeceğimizden, $D\varphi(p')$ de tersi olan bir doğrusal dönüşüm olacak; tam rank olduğu için bu fonksiyondan herhangi bir kritik nokta katkısı gelmeyecek.

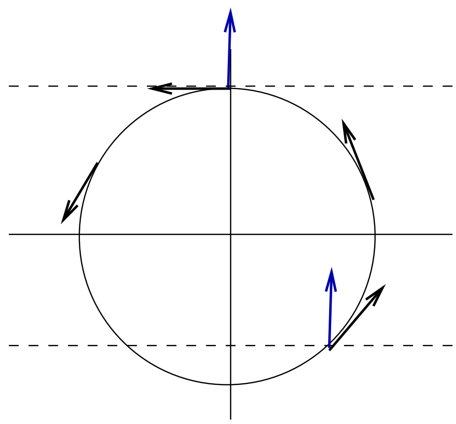
Bu tartışmaya ikinci derste daha derinlemesine gireceğiz. Şimdi Örnek 5'e dönüp bu örneği farklı bir bakış açısıyla inceleyelim.

Şekil 1'e yeniden bakalım. Kesikli çizgiler

$$\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto y$$

fonksiyonunun *eşdeğer (eşyükselti) eğrileridir*. Bu yeni $\tilde{f}$ fonksiyonu S^1'e kısıtlandığında aynen f'yi verir: $\tilde{f}|_{S^1} = f$. Böyle bir $\tilde{f}$ fonksiyonuna f'nin bir *genişletilmiş fonksiyonu* diyeceğiz. Dikkat edilirse, f'nin S^1'de kritik noktaları, $\tilde{f}$'nın eşdeğer eğrilerinin S^1 manifolduna teğet olduğu noktalarmış gibi görünüyor. Bu durum aslında bu örneğe özel bir durum değildir. Bu özel olmayan durumu özel durumumuz için şöyle paketleyelim:

Teorem 3. *$f : S^1 \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun kritik noktaları tam da $\mathbb{R}^2$'ye genişletilmiş $\tilde{f}$'nın eşdeğer eğrilerinin S^1'e teğet olduğu noktalardır.*



Şekil 3: Yukarı doğru (mavi) vektörler $\nabla \tilde{f}$, diğerleri (siyah) S^1'e teğet vektörler

Kanıt: Bir önceki sayfada kritik noktalarla ilgili tartışmaları bir an için doğru kabul edip devam edelim. f'nin bir kritik noktasının $p \in S^1$ olması demek, $p' = \varphi^{-1}(p)$ için $D(f \circ \varphi)(p') = 0$ demekti. Soldaki ifade $D(\tilde{f} \circ \varphi)(p')$'ye eşittir. $\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ olduğundan alışılmış zincir kuralını kullanarak

$$0 = D(\tilde{f} \circ \varphi)(p') = D\tilde{f}(p) \circ D\varphi(p')$$

bulunur. Örneğin bu ifadeye $(1) \in T_{p'}\mathbb{R}$ vektörünü yedirirsek,

$$0 = D\tilde{f}(p) \circ D\varphi(p')(1) = \nabla \tilde{f}(p) \cdot D\varphi(p')(1)$$

bulunur. Son ifadenin 0'a eşit olması demek, $\nabla \tilde{f}(p)$ (satır) vektörüyle $D\varphi(p')(1)$ (sütun) vektörünün birbirine dik olması demektir. $\nabla \tilde{f}(p)$, $\tilde{f}$'nın eşdeğer eğrilerine de diktir. Dolayısıyla p kritik noktaysa $D\varphi(p')(1)$ vektörü eşdeğer eğrilere teğettir. Bu vektör çemberin teğet uzayında yattığından, aslında çemberin teğet uzayı ile $\tilde{f}$'nın eşdeğer eğrileri teğettir (bkz. Şekil 3). [3] $\square$

[3](1) vektörünü ilk denklem satırına yedirmeseydik, oradaki terimler birer doğrusal dönüşüm olarak kalacaklardı. Geometrik bir kavram olarak $\mathbb{R}^2$'de diklik konusunda bir şey söyleyebilmek için, dönüşümü bir vektöre uygulayarak $\mathbb{R}^2$'de bir vektöre çevirebildik.

Tamamen şekle ve analiz sezgimize güvenerek yaptığımız bu kanıtta kullandığımız yeni nesneyi tanımlayarak dersi bitiriyoruz:

Tanım. S^1'in p noktasındaki *teğet uzayı*, o nokta çevresinde çalışan bir φ parametrizasyonu ve $p' = \varphi^{-1}(p)$ için

$$\{D\varphi(p')(v) : v \in T_{p'}\mathbb{R}\}$$

kümesidir. Bu kümeyi T_pS^1 olarak göstereceğiz. $\square$