Ders 10: Kulplar

Birçok teknik ve kuramsal zorluğu aştıktan sonra Morse kuramının güzel sonuçlarına yaklaştık. Bu derste Morse kuramı yardımıyla bir manifoldun *kulp* denen basit parçaların yapıştırılmasıyla elde edilebileceğini göreceğiz ([Mats], [GoSt]).

Önce yine teknik bir adımla başlayalım.

Teorem 27. *$f : M \to \mathbb{R}$ Morse olsun. f'ye istenildiği kadar yakın ve kritik değerleri birbirinden ayrı bir Morse fonksiyonu vardır.*

Kanıt. p, f'nin bir kritik noktası ve U bunun etrafında bir Morse yaması olsun. f'yi yalnızca U'da hafifçe dürterek yeni bir f' Morse fonksiyonu yaratabileceğimizi, bu fonksiyonun kritik noktalarının f'ninkilerle aynı olmasına karşın $f'(p) \neq f(p)$ yapılabileceğini göstereceğiz.

$p \in K \subset L \subset U$ olacak biçimde K, L tıkız kümeleri ve $\phi : M \to \mathbb{R}$, $\phi|_K \equiv 1$, $\text{ev}(\phi) \subset L$ koşullarını sağlayan bir şapka fonksiyonu alalım (Alıştırma 24). $a \in \mathbb{R} - \{0\}$, mutlak değeri yeterince küçük bir sayı için $f' = f + a\phi$ fonksiyonuna bakalım. $M \setminus L$'de $f' = f$ ve K'de $f' = a + f$. Bu yüzden bu iki kümede f' ve f'nin kritik noktaları aynı. f' fonksiyonunun K'de tek bir kritik noktası var, o da p. Dolayısıyla f''nün yeni bir kritik noktası varsa ancak aradaki $N = L \setminus \text{iç}(K)$ tıkız kümesinde olabilir. Öyle bir $c \in \mathbb{R}$ vardır ki N üzerinde

$$\left| \left(\frac{\partial f'}{\partial x_i} \right)^2 - \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \right| \leq c \left| \frac{\partial f'}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|$$

sağlanır. Sağ taraf $\left| a \dfrac{\partial \phi}{\partial x_i} \right|$ değerinden küçükeşittir. Şapka fonksiyonunun birinci kısmi türevlerinin mutlak değerleri N üzerinde üstten bir $\nu \in \mathbb{R}^+$ sınırlanabileceği için

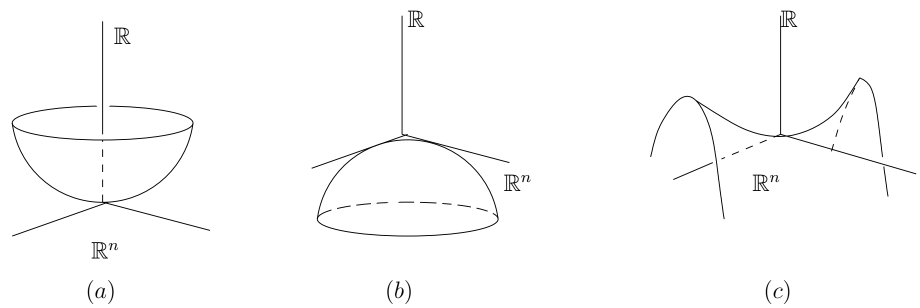
$$\left| \left(\frac{\partial f'}{\partial x_i} \right)^2 - \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \right| \leq |a| \nu \mu$$

buluruz. Buradan sonuca varıyoruz: N'de $\sum \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2$ alttan pozitif bir sayıyla sınırlandırılabileceği için $\sum \left(\frac{\partial f'}{\partial x_i} \right)^2$ toplamı da N'de sıfır olamaz. Dolayısıyla f''nün N'de kritik noktası olamaz. $\square$

10.1 Kulplara ayırma

Yukarıdaki teorem sayesinde kritik değerleri birbirinden ayrı Morse fonksiyonlarıyla uğraşarak devam ediyoruz. $f : M \to \mathbb{R}$ böyle bir fonksiyon olsun.

1. p, indisi 0 olan bir kritik nokta olsun. Morse yamasında fonksiyon $f : B(0,\epsilon) \to \mathbb{R},\ (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_1^2 + \ldots + x_n^2$ olacak. Böylece f'nin grafiği Şekil 14(a)'daki gibi olacak. Burda $B(0,\epsilon) \subset \mathbb{R}^n$, merkezi 0 olan ve ϵ yarıçaplı bir top ve bu özel inşada buna n *boyutlu 0-kulp* diyoruz.



Şekil 14:

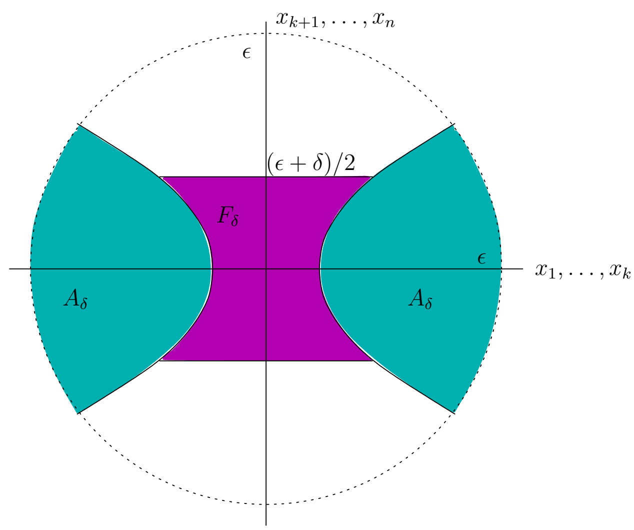
2. p, indisi n olan bir kritik nokta olsun. Morse yamasında fonksiyon $f : B(0,\epsilon) \to \mathbb{R},\ (x_1, \ldots, x_n) \mapsto -x_1^2 - \ldots - x_n^2$ olacak. Böylece f'nin grafiği Şekil 14(b)'ye benzeyecek. Burdaki $B(0,\epsilon)$ topuna n *boyutlu n-kulp* diyoruz.

3. p, indisi k olan bir kritik nokta olsun ($0 < k < n$). Morse yamasında fonksiyon $f : B(0,\epsilon) \to \mathbb{R},\ (x_1, \ldots, x_n) \mapsto -x_1^2 - \ldots - x_k^2 + x_{k+1}^2 + \ldots + x_n^2$ olacak. f'nin grafiği Şekil 14(c)'yi andıracak (p eğer noktası). Bu şekildeki yüzeyi yavaş yavaş suya batırın. p noktası suya batmadan bir az önce suyun üstünde kalan noktalar kümesine n *boyutlu k-kulp* diyoruz.

Bu adlandırmalara matematiksel olarak açıklık getirip bir anlam verelim. $0 < \delta << \epsilon$ olsun. $B(0,\epsilon)$ Morse yaması içinde $f = -x_1^2 - \ldots - x_k^2 + x_{k+1}^2 + \ldots + x_n^2 \leq -\delta < 0$ eşitsizliğini sağlayan noktalar (A_δ) yani yüksekliği $-\delta$'dan az olanlar, Şekil 15'te leylak rengiyle gösterilmiş. Kulpun içinde olup da yüksekliği $-\delta$'dan fazla ve δ'dan az olanlarsa yine Şekil 15'te mavi tonuyla gösterilmiş:

$$F_\delta : x_1^2 + \ldots + x_n^2 \leq \epsilon, \quad -\delta \leq -x_1^2 - \ldots - x_k^2 + x_{k+1}^2 + \ldots + x_n^2 \leq \delta$$

Tanım 19. *ϵ yarıçaplı bir Morse yaması içinde yukarıdaki eşitsizlikleri sağlayan noktaların kümesine n* boyutlu k-kulp *denir.*



Şekil 15:

Alıştırma 34. *Bu tanımın, yukarda* 1. *ve* 2.*'de tarif edilen 0- ve n-kulplarla aynı şeyi anlattığını gösterin.*

İlk ve son eşitsizlikleri taraf tarafa toplarsak, F_δ'daki noktaların

$$x_{k+1}^2 + \ldots + x_n^2 \leq (\epsilon + \delta)/2$$

eşitsizliğini sağlaması gerektiğini görürüz. Dolayısıyla bir k-kulpun son $n-k$ noktası, $n-k$ boyutlu bir kapalı toptan (D^{n-k}) gelmeli. Kulpun içinde $x_{k+1} = \ldots = x_n = 0$ eşitliklerini sağlayan noktalara kulpun *kılçığı* diyoruz. F_δ'nın eşitsiliklerine yerleştirince $x_1^2 + \ldots + x_k^2 \leq \delta$ buluruz. Demek ki kılçık D^k'ye homeomorf.

Alıştırma 35. *n boyutlu bir k-kulpun $D^k \times D^{n-k}$'ye homeomorf olduğunu gösterin.*

Bir k-kulpunu D^n yerine ısrarla $D^k \times D^{n-k}$ yazmamızın bir nedeni var. k-kulp F_δ, manifoldun daha aşağıdaki noktalarından oluşuk A_δ kümesine, $(\partial D^k) \times D^{n-k} = S^{k-1} \times D^{n-k}$'ya homoeomorf bir bölgede yapışıyor.

Alıştırma 36. *$A_\delta \cap F_\delta$ kümesini koordinatlar cinsinden bulun.*

Son olarak, Alıştırma 35'in savından daha güçlü bir sav doğru. Eğer F_δ'nın köşelerini *yumuşatırsak* bir k-kulpu $D^n = D^k \times D^{n-k}$ topuna difeomorf yapabiliriz (asıl kaynak için [GoSt] ya da [Mats]'a bakın). Bu durumda şu da doğru olacaktır:

Sav 28. *$f^{-1}(-\infty, -\delta] \cup$ k-kulp, $f^{-1}(-\infty, +\delta]$'ya homeomorftur. Köşeler yumuşatıldıktan sonra bu manifoldlar difeomorftur.*

Bu savın ilk kısmı neredeyse bariz, kanıtı atlayıp gelecek dersteki örneklere doğru ilerleyelim. Bu derste şuna ikna olduk: kapalı (yani tıkız ve kenarsız), bağlantılı ve pürüzsüz bir manifold, üstündeki bir Morse fonksiyonunun kritik noktaları sayısı kadar kulpun birbirine yapıştırılmasıyla inşa edilebilir. Bir k-kulpu daha öncekilerin oluşturduğu manifoldun kenarına $\partial(D^k) \times D^{n-k} = S^{k-1} \times D^{n-k}$ boyunca yapıştırılır.