Ders 11: Örnekler

11.1 Kulplarla inşalar

Bu bölümde kulpları birbirine yapıştırıp tanıdık manifoldlar elde edeceğiz. Artık bu son ders. Özellikle dersin ikinci bölümünde son meyveleri toplamak adına koşarak ve boşluklar bırakarak ilerleyelim.

<u>S^n**: n-küre**</u>. n boyutlu küre bir 0- ve bir n- kulpun yani iki yarıkürenin birbirine yapıştırılmasıyla elde ediliyor (Alıştırma 16). $g_n : S^n \to \mathbb{R}^n,\ (x_0, \dots, x_n) \mapsto x_n$ bir Morse fonksiyonu.

<u>$S^n \times S^m$</u>. Bu çarpım manifoldunu $\mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{m+1}$ içinde düşünelim. Bir önceki örnekteki fonksiyondan esinlenerek ve g_n ve g_m fonsiyonlarını kullanarak

$$G = (g_n+A, g_m+B) : S^n \times S^m \to \mathbb{R},\ (x_0, \dots, x_n, y_0, \dots, y_m) \mapsto (x_n+A)(y_n+B)$$

fonsiyonunu tanımlayalım. Burda $A, B > 1$ reel sayıları, kritik değerleri birbirinden ayrı elde etmek için kondu (aşağıdaki hesaba bakın). Şimdi,

$$(x_0, \dots, x_n, y_0, \dots, y_m) \mapsto (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$$

yamasında bu fonksiyon

$$G : (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) \mapsto (\sqrt{1 - \sum x_i^2} + A)(\sqrt{1 - \sum y_j^2} + B)$$

olarak verilir. İfadeyi kısaltmak için $u = \sqrt{1 - \sum x_i^2}$ ve $v = \sqrt{1 - \sum y_j^2}$ yazıp türevi hesaplayınca

$$Dg(p) = \Big(-\frac{x_1}{u}(v+B), \dots, -\frac{x_n}{u}(v+B), -\frac{y_1}{v}(u+A), \dots, -\frac{y_m}{v}(u+A)\Big)$$

buluruz. Bu yamada bu türevi sıfır yapan tek bir nokta var: $x_1 = \ldots = x_n = y_1 = \ldots = y_m = 0$. Bu nokta $S^n \times S^m$'de $((0, \dots, 0, 1), (0, \dots, 0, 1))$ noktasına karşılık geliyor.

Alıştırma 37. *Başka yamalarda çalışarak G fonksiyonunun toplam dört kritik noktası olduğunu gösterin:* $p_{\pm\pm} = ((0, \dots, 0, \pm 1), (0, \dots, 0, \pm 1))$

Bu kritik noktalarda Hessian matrisi

$$\begin{aligned} H_G(p_{\pm\pm}) &= \begin{pmatrix} (\pm v + B) H_n(p_{\pm\pm}) & 0 \\ 0 & (\pm u + A) H_m(p_{\pm\pm}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (\pm 1 + B) H_n(p_{\pm\pm}) & 0 \\ 0 & (\pm 1 + A) H_m(p_{\pm\pm}) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

olur. Burda H_i, g_i fonksiyonunun Hessian matrisiydi ($i = n, m$). $A, B > 1$ olduğundan Hessian hiçbir kritik nokta için tekil değildir ve indisi H_n ve H_m'ninkinin toplamıdır. Dolayısıyla $S^n \times S^m$ manifoldu, $n+m$ boyutlu dört kulpla inşa edilir: 0-kulp, n-kulp, m-kulp ve $(n+m)$-kulp.

$\mathbb{R}P^n$: n boyutlu reel izdüşümsel uzay. $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ kümesinde, $\mathbb{R}^{n+1}$'in aynı 1 boyutlu doğrusal altuzayında olma denklik bağıntısını düşünelim ve $\sim$ diye gösterelim. $\mathbb{R}P^n$ uzayı, $\mathbb{R}^{n+1}/\sim$ bölüm uzayı olarak tanımlanır. Küme olarak $\mathbb{R}^{n+1}$ vektör uzayının 1 boyutlu altuzayları kümesidir. $(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ noktasının $\sim$ altında denklik sınıfını $[x_0 : x_1 : \ldots : x_n]$ olarak gösterelim. $\mathbb{R}P^n$ için bir yama

$$h_j : \mathbb{R}^n \to U_j \subset \mathbb{R}P^n, \ (x_0, x_1, \ldots, \widehat{x_j}, \ldots, x_n) \mapsto [x_0 : x_1 : \ldots : 1 : \ldots : x_n]$$

olarak alınabilir. Burda $\widehat{x_j}$ gösterimi, x_j'nin atlanmış olduğunu kastediyor. U_j yamaları ($j = 0, \ldots, n$), tüm $\mathbb{R}P^n$'yi kaplar.[6]

$\mathbb{R}P^n$ üzerinde bir Morse fonsiyonu tanımlıyoruz. $0 < a_0 < \ldots < a_n$ reel sayıları alalım.

$$f : \mathbb{R}P^n \to \mathbb{R}, \ \ [x_0 : \ldots : x_n] \mapsto \frac{\sum a_i x_i^2}{\sum x_i^2}$$

olsun. $x_0 = 1$ yamasında bu fonksiyon

$$f : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \frac{a_0 + \sum_1^n a_i x_i^2}{1 + \sum_1^n x_i^2}$$

biçiminde çalışır. Türevini hesaplayalım. Yukarıda paydaya u paya v diyerek,

$$j = 1, \ldots, n : \ \ \frac{\partial f}{\partial x_j} = \frac{2a_j x_j}{u} - \frac{2x_j v}{u^2} = \frac{2x_j}{u^2}\big(a_j - a_0 + \sum_{i \neq j} (a_j - a_i) x_i^2\big)$$

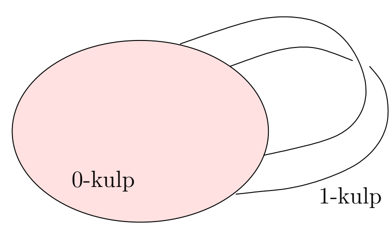
buluruz. Tüm bu türevleri sıfır yapmalıyız. $j = n$ durumunda a_n her a_i'den büyük olduğu için $x_n = 0$ olmalı. j'yi teker teker azaltarak, her $i = 1, \ldots, n$ için $x_i = 0$ buluruz. Bu noktaya karşılık gelen $\mathbb{R}P^n$ noktası $[1 : 0 : \ldots : 0]$ olur. Bu nokta bu yamadaki tek kritik nokta.

[6] Bu konulara kolay bir giriş için Ferit Öztürk'ün İzdüşümsel Geometri açık ders notlarına bakılabilir, http://www.math.boun.edu.tr/instructors/ozturk/yaz10m477/math477.htm

Alıştırma 38. *Tüm $n+1$ tane yamada benzer hesabı yaparak, f'nin $n+1$ kritik noktası olduğunu gösterin. Hessian matrislerini hesaplayarak bu noktaların dejenere olmadığını, indislerinin de $0, 1, \ldots, n$ olduğunu kanıtlayın.*

Demek ki $\mathbb{R}P^n$, $n+1$ tane kulpla inşa ediliyor; her $k = 0, \ldots, n$ için bir k-kulp var.

$\mathbb{R}P^2$**: Reel izdüşümsel düzlem**. Yukardaki örnekte olanları izdüşümsel düzlem durumunda rahatça görüyoruz. $\mathbb{R}P^2$, üç kulpla inşa ediliyor. 0-kulp D^2'den başka bir şey değil. Bir 1-kulp $D^1 \times D^1$. Bunu 0-kulpa $\partial(D^1) \times D^1 = \{*, *\} \times D^1$ boyunca, yani ayrık iki aralık ile yapıştıracağız. *Nasıl* yapıştırılacağı yukarıdaki örnektekine benzer bir analizle keşfedilebilir ama biz bunu şimdilik atlayıp Şekil 16'daki gibi olduğunu ve böylece Möbius şeridinde homeomorf bir manifold elde edileceğini söylemekle yetinelim. 2-kulpu bu şeride $\partial(D^2) \times D^0 = S^1$ boyunca yapıştıracağız. $\mathbb{R}P^2$ böylece elde edilen kapalı bir yüzey olacak. İçinde bir Möbius şeridi olduğu için *yönü* olmayan bir yüzey olacak.



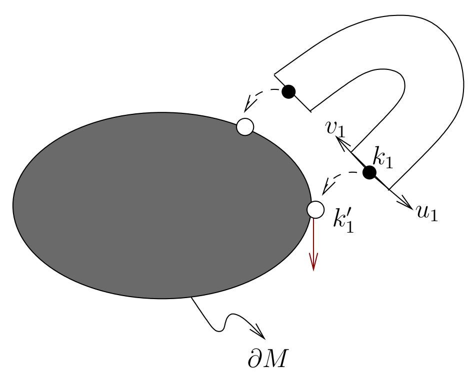
Şekil 16:

11.2 Yapıştırma örnekleri

Dersin başında manifoldları kulplara ayırma örnekleri verdik. Son örnekte 2 boyutlu bir 0-kulpla bir 1-kulpu yapıştırmamız gerekti. Sezgisel olarak bunu iki biçimde yapabiliriz. Yapıştıma sonucu topolojik olarak ya bir halka ($S^1 \times I$) elde ederiz ya da Şekil 16'da olduğu gibi bir Möbius şeridi. Şimdi bu olgu üstüne düşünelim. Birkaç tanım: n boyutlu bir k-kulp için $\partial(D^k) \times D^{n-k} = S^{k-1} \times D^{n-k}$, *yapışma bölgesi* olarak adlandıralım. Bu bölgede kılçığın noktaları kümesine yani $S^{k-1} \times \{0\}$ kümesine *yapışma küresi* diyelim

2 boyutlu 1-kulp: $D1 \times D^1$. Daha önce inşa edilmiş 2 boyutlu bir M manifoldunun kenarına bir 1-kulp yapıştıracağız. Şekil 17'de bunu nasıl yapabileceğimiz görülüyor. 1-kulpun yapışacak kenarı ayrık iki aralık idi; bunlar

D_1^1 ve D_2^1 olsun. Bu aralıkların her birinde kılçığın tek bir noktası var; bunlar da k_1 ve k_2 olsun; yani bu durumda yapışma küresi= $\{k_1, k_2\}$. Yapıştırma işleminde aslında şunu yapıyoruz: önce herbir k_i'yi ∂M'ye yapıştırıyoruz. Sonra bu noktada D_i^1'in teğet uzayının k_i'ye dik vektörlerini nasıl yapıştıracağımızı seçiyoruz. D_i^1'in diğer noktaları da böylece yapışıyor. Dolayısıyla bizim bu dik vektörleri kaç biçimde yapıştırabileceğimize bakmamız lazım. $T_{k_i}D_i^1$ uzayında k_i'ye dik vektörler uzayının boyutu $2-1-0$. Burada 1 çıkarmamızın nedeni kulpun kenarının boyutunu bulmak, 0 çıkarmamızın nedeniyse k_i'ye (yapıştırma küresine) dik olanların boyutunu bulmak (Tamamen gereksiz bir hesap yaptığımızı düşünebilirsiniz, sabırlı olun). Bu dik vektörleri yapıştırma seçimini şöyle yapıyoruz: dik vektörler uzayına ortogonal bir taban seç, bunu karşıdaki tabana gönder. Şekil 17'de bu seçim şu soruya yanıt oluyor: karşıdaki kırmızı vektöre u_1 mi v_1 mi yapışsın? Dolayısıyla $O(1)$ grubundan bir eleman seçmeliyiz. Yaptığımız iki seçim $O(1)$'de birbirine yol bağlantılıysa gösterilebilir ki yapıştırma sonucu oluşan manifoldlar da birbirine homeomorf. Yani bizim $O(1)$'in bağlantılı parça sayısına, $\pi_0(O(1))$'e bakmamız gerek. $\pi_0(O(1)) = \mathbb{Z}^2$ olduğundan yapıştırma sonucu birbirinden farklı iki manifold elde edebiliriz. Bunlardan biri halka diğeri Möbius şeridi.



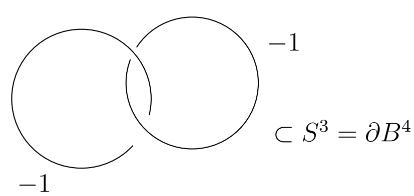
Şekil 17: 2 boyutlu 1 kulpu yapıştırırken bir seçim gerekiyor.

n boyutlu 1-kulp: $D1 \times D^{n-1}$. Değişen pek bir şey yok. Yapıştırma bölgesi şimdi $\partial(D^1) \times D^{n-1} = \{*, *\} \times D^{n-1}$ olacak. Yine kılçığın bu bölgede yalnızca iki noktası var. Dik vektörlerini nasıl yapıştıracağımızı seçsek yetiyor. Dik vektörler uzayının boyutu $n-1-0$. Dolayısıyla yapıştırmayı belirleyebilmek için $O(n-1)$ grubundan bir eleman seçmeliyiz, yani sonuçta $O(n-1)$'in bağlantılı parça sayısına, $\pi_0(O(n-1))$'e bakmalıyız. Ama her $n > 1$ için

$\pi_0(O(1)) = \mathbb{Z}^2$ olduğundan bir 1-kulpu yapıştırmanın her boyutta iki yolu var. Gösterilebilir ki bunlardan biri yönlü diğeri yönü olmayan manifoldlar üretiyor.

4 boyutlu 2-kulp: $D^2 \times D^2$. Şimdi yapıştırma küresi $S^1 \times \{0\}$. Yani önce bu çemberi yapıştıracağız, sonra çember boyunca dik vektörlerin nasıl yapışacağına karar vereceğiz. Dik vektörlerin uzayı $4-1-1$ boyutlu. Burada ikinci 1, yapıştırma küresinin boyutu. Şimdi S^1 boyunca S^1'e dik bir ortogonal taban silsilesi seçmeliyiz. Demek ki seçimlerimiz $O(2)$'den olmalı. Bir noktada tabanı standart seçersek (yani $O(2)$'den I birim matrisini seçersek) birim gösterilebilir ki homotopik seçimleri bir tutarak $\pi_1(O(2), I)$ kadar seçeneğimiz var. Bu grup da $\mathbb{Z}$'den başka bir şey değil.

Dolayısıyla, 4 boyutlu bir 2-kulp yapıştırmak için
(1) kulpun kılçığının nereye yapışacağını seçmek gerekiyor, yani S^1'in ∂M içindeki görüntüsünü seçmek, yani bir düğüm seçmek.
(2) Sonra S^1 boyunca bir dik taban silsilesi seçmek gerek. Ama gördük ki bu seçim $\mathbb{Z}$'nin bir elemanını seçmeye denk. Seçilen her tamsayının geometrik anlamı aşikar: bu sayı, S^1'i düğüme yapıştırırken S^1'e dik yönün düğüme dik yöne göre kaç kez dolanacağını sayıyor.



Şekil 18: Bu çemberlere birer tane 2-kulp yapışacak. Çıkan manifoldun kenarı $\mathbb{R}P^3$.

Şekil 18 şunu anlatıyor: $M = D^4$, $\partial M = S^3$ olsun. S^3'te resimde görünen düğümleri seçtim (düğüm olmamış ama birbirine düğümlü). İki tane 2-kulpun kılçığını bunlara yapıştır. Yapıştırma sırasında herbir kılçığa dik vektörler düğüme dik vektörlere göre (sağ el kuralına göre) -1 kez dönsün. Resimde böylece inşa edilen kenarlı 4-manifoldun $\mathbb{R}P^3$'e homeomorf olduğu gösterilebilir. Dersi bitirelim, sınırlarını çoktan aştık. Bunlar başka bir dersin konusu olabilir.