Ders 2: Manifold, kritik noktaları ve indisleri

Geçen ders kullandığımız terimleri düzgün bir biçimde tanımlayarak başlıyoruz. Bu ders için [Mil1] ve [Mats] izlenebilir.

2.1 Türevli manifold

Tanım 2. *İki topolojik uzay arasında, sürekli, tersi olan ve tersi de sürekli bir gönderime* homeomorfi *denir.* $\mathbb{R}^n$*'nin açık bir altkümesinden* $\mathbb{R}^m$*'ye giden* C^k $(0 \leq k \leq \infty)$ *ve tersi de* C^k *bir gönderime* C^k difeomorfi *denir.* C^∞ *difeomorfiye* gıcır difeomorfi *diyeceğiz.* □

Tanım gereği, $\mathbb{R}^n$'nin açık bir altkümesinden $\mathbb{R}^m$'ye giden bir difeomorfi bir homeomorfidir.

Tanım 3. *M topolojik bir uzay, p herhangi bir noktası olsun. V, $\mathbb{R}^n$'de açık bir altuzay olmak üzere $\varphi : V \to M$ gönderimi homeomorfiyse ve $p \in \varphi(V)$ ise φ'ye M'nin p çevresinde bir* parametrizasyonu *denir (bkz. Şekil 4).*

M Hausdorff[4] *ve ikinci sayılabilir*[5] *ise ve M'nin her noktası çevresinde $\mathbb{R}^n$'den kalkıp gelen bir parametrizasyon bulunabiliyorsa M'ye n* boyutlu topolojik manifold *denir. Ya* $\text{boyut}(M) = n$ *olarak yazacağız ya da M^n olarak göstereceğiz.*

Tanımda topolojik uzay üzerine konulan ek koşullar, manifold üzerinde makul bazı teknik gereçlerin çalışabilmesi için gerekli. Bizim için en önemli manifold örnekleri, bir $\mathbb{R}^K$ Öklit uzayında yatan, topolojisi oradan tetiklenen uzaylar olacak. Bu uzayların Hausdorff ve ikinci sayılabilir olduğuna, şu alıştırma sayesinde eminiz.

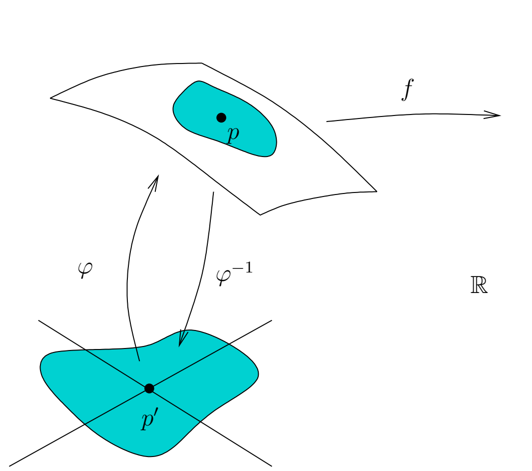
Alıştırma 3. *$\mathbb{R}^K$'nin herhangi bir alt uzayının Hausdorff ve ikinci sayılabilir olduğunu gösterin.*

Tanım 4. *M topolojik bir manifold olsun. Herhangi bir $p \in M$ çevresinde çalışan herhangi iki parametrizasyon $\varphi_1 : V_1 \to M$ ve $\varphi_2 : V_2 \to M$ için*

$$\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 : V_1 \to \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1(V_1) \subset V_2$$

[4] Hausdorff topolojik uzay, herhangi farklı iki noktasının ayrık komşulukları olan uzaydır.

[5] İkinci sayılabilir topolojik uzay, "ikinci sayılabilirlik beliti"ni sağlayan uzaydır; yani topolojisinin sayılabilir bir tabanı vardır.



Şekil 4: M manifoldunun p noktasında φ ile parametrizasyonu

gönderimine p'de geçiş gönderimi *diyeceğiz. M uzayının her noktasında her geçiş gönderimi difeomorfiyse M'ye* türevli manifold *denir.*

Geçiş gönderimlerinin C^k ya da gıcır olmasına göre M'ye C^k-manifold *ya da* pürüzsüz manifold *diyoruz.*

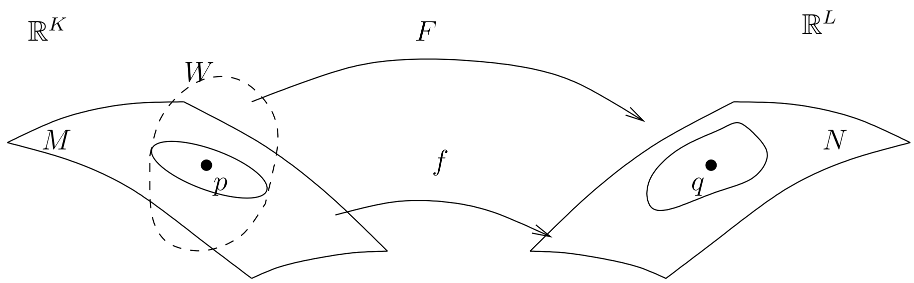
$\Phi_1 = \varphi_1^{-1} : U_1 = \varphi_1(V_1) \to V_1$ *gönderiminin varış kümesi* $\mathbb{R}^n$*'de olduğundan,* $\Phi_1 = (x_1, \cdots, x_n)$ *şeklinde yazılabilir. Buradaki* $x_i : \varphi_1(V_1) \to \mathbb{R}$ *fonksiyonlarına, p noktası çevresinde* koordinat fonksiyonları, Φ_1 *gönderimine de kimi zaman* koordinat sistemi *denir.* (Φ_1, U_1) *ikilisine* yama *denir.*

Alıştırma 4. *C^0-manifoldun Tanım 3'teki gibi topolojik manifold olduğunu gösterin.*

M türevli bir manifold ve $\varphi : V \to M$ gönderimi p noktası çevresinde bir parametrizasyon olsun. Bu manifold üzerinde tanımlı bir f fonksiyonunun p noktasındaki türevini

$$Df(p) = D(f \circ \varphi)(p'), \quad (\varphi(p') = p)$$

olarak yazınca doğru bir şey yapmamış gibi görünüyoruz çünkü bir kere, soldaki türev henüz tanımlı değil; ayrıca Ders 1'deki sezgimiz doğrultusunda gitsek bile, sağ ve soldaki türevlerin kalkış kümeleri farklı. Şu tanımın zamanı geldi:



Şekil 5: M'den N'ye f fonksiyonunun p noktası çevresinde genişletmesi

Tanım 5. *M türevli bir manifold, $p \in M^m$ için, $\varphi : V \to M$, $p' \mapsto p$ bir parametrizasyon, ve $f : M \to \mathbb{R}$ olsun. Eğer $D(f \circ \varphi)(p')$ varsa, bu ifadeye f'*nin φ parametrizasyonunda p noktasındaki türevi *diyeceğiz ve $Df(p)$ olarak göstereceğiz (bkz. Şekil 4). Eğer $\{x_i\}_{i=1,\ldots,m}$, V'de bir koordinat tabanı seçimiyse, $\frac{\partial}{\partial x_i}(f \circ \varphi)(p')$ kısmi türevini kimi zaman $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p')$ olarak da göstereceğiz.*

Görüldüğü gibi, (soyut) bir türevli manifoldda türev tanımı parametrizasyona bağımlı. Yine de, Morse kuramında ilgileneceğimiz kavramlar parametrizasyondan bağımsız olacak. Bunlara geçmeden, türevli bir manifoldu başka bir biçimde yeniden tanımlayalım.

Tanım 6. *M ve N, sırasıyla $\mathbb{R}^K$'de ve $\mathbb{R}^L$'de yatan birer topolojik manifold olsun. Yani M ve N hem manifold olsun hem de topolojileri, içinde bulundukları uzayın topolojisinden tetiklensin. $f : M \to N$ sürekli bir gönderim olsun. Eğer $p \in M$ noktası çevresinde açık $W \subset \mathbb{R}^K$ uzayı ve $F|_{W \cap M} = f$ olacak biçimde $F : W \to N$ sürekli gönderimi bulunabiliyorsa F gönderimine p çevresinde f'nin* genişletmesi *denir (bkz. Şekil 5).*

Tanım 7. *(*Türevli manifold, *tekrar) M uzayı $\mathbb{R}^K$'nin içinde topolojik bir manifold olsun. M'nin herbir p noktasında çalışan herbir parametrizasyonunun tersi, p çevresinde $\mathbb{R}^K$'nin bir açık kümesine türevlenebilir (C^k, gıcır vs.) bir biçimde genişletilebiliyorsa M'ye* türevli (C^k-, pürüzsüz vs.) manifold *denir.*

Bu durumda M'ye $\mathbb{R}^K$'nin bir altmanifoldu *ya da $\mathbb{R}^K$'ye* gömülmüş *diyoruz.*

Bu tanım daha önce yaptığımız tanıma denktir. Eğer bir $M \subset \mathbb{R}^K$ uzayı Tanım 7'yi sağlıyorsa, p noktasında herhangi φ_1 ve φ_2 parametrizasyonları ve genişletilmiş tersleri Φ_1 ve Φ_2 için, $\Phi_2 \circ \varphi_1$ ve $\Phi_1 \circ \varphi_2$ geçiş gönderimleri türevlenebilir (C^1 vs.) olur. Üstelik bu iki gönderim birbirinin tersidir. Dolayısıyla geçiş gönderimleri tam da Tanım 4'ün istediği gibi difeomorfi olur.

Tanım 4'ün Tanım 7'yi gerektirmesiyse derin bir teorem aracılığıyla sağlanır. Whitney Gömme Teoremi denen bu teorem, Tanım 4'ü sağlayan her türevli manifoldun, türevli yapısıyla birlikte bir $\mathbb{R}^K$'ye *gömülebileceğini* garanti eder (bkz. örneğin [Hirs]).

2.2 Türevli gönderimler, kritik noktaları, indisler

Teorem 4. *İki türevli manifold arasında bir fonksiyon bir noktada bir parametrizasyona göre türevliyse, o noktada her parametrizasyon için türevlidir.*

Kanıt: $f : M \to N$ gönderimi, $p \in M$ noktasında φ_1 parametrizasyonunda türevlenebilir olsun. p çevresinde herhangi bir φ_2 parametrizasyonu için:

$$\begin{aligned} Df(p) = D(f \circ \varphi_1)(p_1) &= D(f \circ \varphi_2 \circ \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1)(p_1) \\ &= D(f \circ \varphi_2 \circ \Phi_2 \circ \varphi_1)(p_1) \\ &= D(f \circ \varphi_2)(p_2) \circ D(\Phi_2 \circ \varphi_1)(p_1) \end{aligned}$$

buluruz. Buradaki ilk eşitlik tanımın kendisiydi. İkinci satıra geçerken φ_2'nin bir Φ_2 genişletmesinin var olduğunu Tanım 7'den söyledik. Son satıraysa bilindik zincir kuralıyla geçebildik. $\Phi_2 \circ \varphi_1$, manifold tanımı gereği bir difeomorfi olduğundan,

$$D(f \circ \varphi_2)(p_2) = (D(\Phi_2 \circ \varphi_1)(p_1))^{-1} \circ D(f \circ \varphi_1)(p_1)$$

elde ederiz. Sağ taraf tanımlıdır. Dolayısıyla f, φ_2 parametrizasyonunda da türevlidir. $\square$

Alıştırma 5. *Manifoldlar arası gönderimler için bir zincir kuralı yazın ve kanıtlayın (Aşağıdaki tanıma bakabilirsiniz).*

İlk derste Tanım 1'de iki Öklit uzayı arasında bir fonksiyon için kritik noktayı tanımlamıştık. Şimdi bu tanımı genişletelim:

Tanım 8. *M^m ve N^n türevli iki manifold, $f : M \to N$ sürekli bir gönderim olsun. f, $p \in M$ noktasında bir parametrizasyona göre türevliyse, f'ye p*'de türevli bir gönderim *denir. f'nin türevinin rankının olası en yüksek* $\max(m, n)$ *değerine sahip olduğu durumda türeve* tam rank *denir. Türevin tam rank olmadığı noktalara* kritik nokta *denir. Herhangi bir kritik noktanın f altında görüntüsüneyse* kritik değer *denir.*

Bu tanımda bir şey eksik: f'nin türevinin kalkış ve varış kümelerini yazmadık! Bu kümeler, manifoldların o noktalardaki *teğet uzayları* olacak. Bu uzayların tanım ve inşasına 7. Ders'te değineceğiz.

Tanımda f'nin türevliliği, parametrizasyondan bağımsız olarak tanımlı (Teorem 4). Ancak tam rank olmanın ve kritik noktaların parametrizasyondan bağımsız oldukları belli değil. Şu teorem bu işi çözecek:

Teorem 5. *$f : M \to N$ türevli gönderiminin bir noktada tam rank olup olmaması, parametrizasyondan bağımsızdır.*

Kanıt: φ_1 ve φ_2 bir noktada iki parametrizasyon olsun. $D(f \circ \varphi_1) = D(f \circ \varphi_2) \circ D(\Phi_2 \circ h_1)$ idi. $D(\Phi_2 \circ h_1)$ difeomorfi olduğundan tam ranktır. Dolayısıyla, f'nin φ_2'ye göre rankı, φ_1'e göre rankına eşittir. □

Tanım 9. *$f : M \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve p kritik bir noktası olsun. Eğer f'nin p noktasında φ parametrizasyonunda Hessian matrisi, yani $(f \circ \varphi)$'nin ikinci türev matrisi, tekilse p'ye* dejenere kritik nokta*, eğer tekil değilse* dejenere olmayan kritik nokta *denir.*

Dejenere olmayan bir kritik noktanın indisi*, Hessian matrisinin o noktadaki negatif özdeğerlerinin sayısıdır.*

Hessian matrisi, simetrik ve gerçel girdili bir matris olduğu için köşegenleştirilebilir. Bu sayede bir kritik noktanın indisi, köşegenleştirilmiş Hessian matrisinin negatif girdilerinin sayısıdır.

Alıştırma 6. *Her simetrik ve gerçel girdili matrisin köşegen haline getirilebileceğini kanıtlayın.*

Örnek. $\mathbb{R}^3$'te birim küre (S^2) üzerinde tanımlanmış bir yükseklik fonksiyonunun kritik noktalarını ve indislerini bulalım.

Yapılması gereken, küre için parametrizasyonlar ve bir yükseklik fonksiyonu tanımlamak. Yükseklik fonksiyonu basitçe

$$f : S^2 \to \mathbb{R}, \ \ (x, y, z) \mapsto z$$

olsun. Olası bir parametrizasyon, $\mathbb{R}^2$'de birim daireyi üst yarım ve alt yarım kürelere çıkarmak. Daha kolay bir parametrizasyon küresel koordinatları kullanarak θ ve φ açıları ile parametrize etmek olabilir. Her parametrizasyonun, kürenin bazı noktalarını ıskaladığına dikkat edin.

Bu örnekte yarım küreleri daireyle parametrize edeceğiz. Diğer parametrizasyonları alıştırma olarak bırakıyoruz.

Önce $\varphi_\pm : D^2 \to S^2, (x,y) \mapsto (x, y, \pm\sqrt{1-x^2-y^2}$ parametrizasyonunu alalım. Bunlardan φ_+, daireden noktaları alıp üst yarım küreye izçıkımını yapıyor. Bu durumda,

$$f \circ \varphi_+ : D^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto \sqrt{1-x^2-y^2}$$

ve

$$D(f\circ\varphi_+)(x,y) = \left[\frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right]_{1\times 2}$$

olur. Bu matrisin tam rank olmadığı durumda iki girdisinin de 0 olması gerekiyor; bu da $-x = 0, -y = 0$ olması demektir. Dolayısıyla üst yarım kürede tek kritik nokta, $(0,0,1)$ noktasıdır. Şimdi bu noktada Hessian matrisini hesaplayalım:

$$H(f\circ\varphi_+)(0,0) = \begin{pmatrix} \frac{y^2-1}{\sqrt{1-x^2-y^2}^{3/2}} & \frac{-yx}{\sqrt{1-x^2-y^2}^{3/2}} \\ \frac{-yx}{\sqrt{1-x^2-y^2}^{3/2}} & \frac{y^2-1}{\sqrt{1-x^2-y^2}^{3/2}} \end{pmatrix}_{(0,0)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Dolayısıyla bu nokta dejenere değildir ve indisi 2'dir. Aynı hesapları φ_- için de yaparsak dejenere olmayan $(0,0,-1)$ kritik noktasını buluruz. Bu noktanın indisiyse 0'dır. Küreyi tamamen kaplayacak biçimde başka parametrizasyonlar seçilirse ve bu iki noktadan başka kritik nokta çıkmayacaktır.

Alıştırma 7. *Güney kutbunun indisinin 0 olduğunu gösterin. $\varphi_\pm$ parametrizasyonları, kürenin hangi noktalarını ıskalıyor? $\varphi_\pm$'ye öyle parametrizasyonlar ekleyin ki ıskalanan noktalar da kaplansın.*

□

Alıştırma 8. *Yukardaki hesapları, küreyi küresel koordinatlarla parametrize ederek yapın.*

Görüldüğü üzere her kritik nokta için bir indis hesaplamış olduk. Bu hesap için fiziksel bir modelimiz var. Bir kürenin tam tepesinin biraz yanına bir damla su bıraktığımız zaman (tam tepesine değil ama) bu damla aşağıya doğru akmaya başlar. Tanımsal olarak bir cisim üzerindeki kuvvet, o cismin tabi olduğu U potansiyel fonksiyonunun eksi gradyanıdır, yani $F = -\nabla U$. Küre üzerindeki bir damlacığın potansiyel enerjisi yerden olan uzaklığı ile orantılıdır (aslında ağırlık çarpı yükseklik çarpı yer çekimi ivmesine eşittir tam olarak). Dolayısıyla damlacık, bu yükseklik fonksiyonunun eksi gradyanının belirlediği yönde akacak. Küre üzerindeki herhangi bir noktada yükseklik fonksiyonunun gradyanı küreye teğet bir vektör verecek ve bu vektörler de ordan geçmekte olan bir damlacağın ne tarafa doğru hareket etmeye devam edeceğini gösterecek. Aslında bu damlacığın izlediği yol ve bu vektörler, damlacığın tabi olduğu bir diferansiyel denklemin çözümünü oluşturan faz eğrilerini tarif etmektedir. Bir kritik noktanın indisiyse, bir parametrizasyona göre bir faz eğrisinin kritik noktaya yaklaşan bir hareketi mi, yoksa kritik noktadan uzaklaşan bir hareketi mi tarif ettiğini gösterir. Örneğin kuzey kutbunun indisinin 2 olması, o civardaki akış eğrilerinin hepsinin o noktadan uzağa doğru gittiğini gösterir; bu nokta yerel tepedir. Güney kutbunun 0 indisi, civarındaki faz eğrilerinin hepsinin o noktaya doğru aktığını anlatır; bu nokta yerel çukurdur. Eğer bir noktanın bir indisi artı bir indisi eksi olsaydı bu bir eyer noktasına denk gelecekti.

Gelelim Morse kuramını başlatan teoreme:

Teorem 6. *Bir kritik noktanın dejenere olması ve indisi, parametrizasyondan bağımsızdır.*

Kanıt: $f : M^m \to \mathbb{R}$ türevli bir fonksiyon, $x = (x_1, \ldots, x_n) : U_1 \to M$ ve $y = (y_1, \ldots, y_n) : U_2 \to M$, $p \in M$ noktası çevresinde iki parametrizasyon olsun. Burada x_i ve y_i fonksiyonları, Tanım 4'te olduğu gibi, x ve y parametrizasyonlarının koordinat fonksiyonları. Ayrıca, $p_1 = x^{-1}(p)$ ve $p_2 = x^{-1}(p)$ olsun.

Bu durumda, f fonksiyonunun x parametrizasyonuna göre Hessian matrisi $\overset{x}{H}f(p) = \overset{x}{H}(f \circ x)(p_1) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(f \circ x)\right)_{i,j}$ olacak. Burada H'nin üstüne x koyarak parametrizasyon alemimizi aklımızda tutuyoruz. Şimdi Hessian matrisinin (i, j) girdisini y için yazalım:

$$\begin{aligned}
(\overset{y}{H}(p_2))_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j}(f \circ y)(p_2) &= \frac{\partial}{\partial y_i} \sum_k \frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial y_j} \\
&= \sum_l \frac{\partial x_l}{\partial y_i} \frac{\partial}{\partial x_l} \sum_k \frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial y_j} \\
&= \sum_l \frac{\partial x_l}{\partial y_i} \sum_k \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_l \partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial y_j} + \frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{\partial^2 x_k}{\partial x_l \partial y_j} \right) \\
&= \sum_{k,l} \frac{\partial x_l}{\partial y_i} \frac{\partial^2 f}{\partial x_l \partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial y_j} \\
&= [J^T_{y \to x} \overset{x}{H}(p_1) J_{y \to x}]_{ij}
\end{aligned}$$

Burda J matrisi, y aleminden x alemine p_2 noktasında koordinat dönüşüm matrisini ifade ediyor. Bu durumda $\overset{y}{H} f(p_2)_{ij}$ tam ranksa $\overset{x}{H} f(p_1)_{ij}$ de tam rankdır. Ayrıca iki matrisin indisleri de eşittir.

Alıştırma 9. *A, B ve S, $m \times m$ matrisler olsun ve S tekil olmasın. $A = S^T BS$ ise A ve B'nin negatif özdeğer sayılarının birbirlerine eşit olduğunu gösterin.*

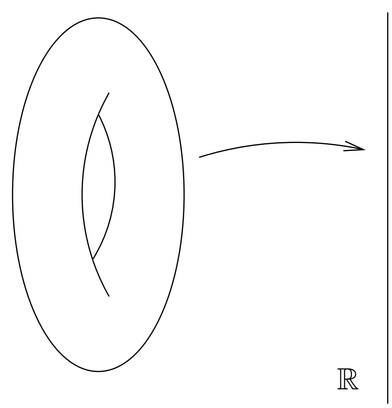
□

Tanım 10. *M bir manifold, $f : M \to \mathbb{R}$ türevli bir fonksiyon olsun. Eğer f'nin hiçbir dejenere kritik noktası yoksa bu fonksiyona* Morse fonksiyonu *denir.*

Gelecek derslerde Morse fonksiyonlarının birçok ilginç özelliğini göreceğiz. Hatta bir Morse fonksiyonunda manifoldun türevli topolojik bilgisinin gizli olduğunu göreceğiz.

Dersi tanıdık bir yüzeyle ilgili bir alıştırmayla bitirelim.

Alıştırma 10. *Aşağıdaki 2 boyutlu simit (torus) için parametrizasyonlar belirleyip gösterilen malum yükseklik fonksiyonu için kritik noktaları ve bunların indislerini bulun.*



Şekil 6: Simit, 2 boyutlu bir manifold.