Ders 3: Morse Önsavı ve bir uygulaması

Bu derste Morse Önsavını ortaya atıp bunu kullanarak S^1'e ilişkin bir uygulama yapacağız. Burada kaynak olarak [Mats] ve [GuPo] izlenebilir.

3.1 Morse önsavı

$\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$'ye türevli bir fonksiyonun türevi bir noktada sıfır değilse o nokta civarında fonksiyonun tersi vardır. Bunu söyleyen teorem *Ters Fonksiyon Teoremi*. Bu teorem aslında daha genelini söyler: $\mathbb{R}^n$'den $\mathbb{R}^n$'ye bir C^k-gönderimin bir noktadaki türevi tekil değilse, o nokta çevresinde gönderim bir C^k-difeomorfidir.

Türevin tekil olduğu noktalarda, yani kritik noktalarda, Ters Fonksiyon Teoremi bir şey söyleyemez. Yine de, bir kritik nokta dejenere değilse, o noktanın bir komşuluğunda fonksiyon *güzel* davranır. Bunu söyleyen, Morse Önsavı'dır.

Teorem 7. (Morse Önsavı) *M bir m-manifold, $f : M \to \mathbb{R}$ türevlenebilir bir fonksiyon ve $p_0 \in M$ noktası f'nin dejenere olmayan bir kritik noktası olsun. Bu durumda p_0 çevresinde bir komşulukta öyle $(x_1, x_2, ..., x_m)$ koordinatları ve öyle bir k tamsayısı ($0 \leq k \leq m$) vardır ki bu komşuluktaki her p noktası için*

$$f(p) = f(p_0) - x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_k^2 + x_{k+1}^2 + x_{k+2}^2 + \cdots + x_m^2$$

olarak ifade edilir.

Dikkatle bakarsanız, $f(p)$'nin ifadesinde bir notasyon karmaşası olduğunu görürsünüz. O satırda p ve p_0 manifoldda, oysa x_i'ler $\mathbb{R}^n$'de. Böyle bir ifadede p ve p_0 yazarken kastettiğimiz, bu noktaların parametrizasyon altında aşağıda, $\mathbb{R}^n$'de görüntüsü.

Bu teoremde manifoldda koordinatların tanımlandığı açık bölgeye *Morse komşuluğu*, buradaki koordinatlara *Morse koordinatları* diyeceğiz. f fonksiyonu Morse ise, teorem sayesinde f'nin herbir kritik noktası çevresinde bir Morse komşuluğu bulabiliriz. Morse Önsavının kanıtını sonra vereceğiz.

Morse Önsavına göre örneğin dejenere olmayan kritik bir p_0 noktasında, eğer $k = 0$ ise bütün terimlerin başındaki işaretler artı olacak ve dolayısıyla p_0 noktası, f fonksiyonunun M üzerinde bir yerel çukuru olacak. Dinamik sistem bakış açısından, p_0 noktası civarında bırakılan su damlacıkları yükseklik fonksiyonunun azalan yönünde hep p_0 noktasına doğru kayacak. Eğer k sıfırdan farklıysa, ilk k yönde su damlacığı yükseklik fonksiyonun azalan yönünde noktadan uzaklaşacak, diğer yönlerde noktaya yaklaşacak.

Morse Önsavını izleyen bazı sonuçları kanıtlayalım.

Sonuç 8. *Morse önsavında k sayısı f fonksiyonun p_0'daki indisine eşittir.*

Kanıt: İndisleri bulmak için Hessian matrisini hesaplayalım:

$$\begin{aligned} H &= \begin{pmatrix} f_{x_1x_1} & \cdots & f_{x_1x_n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ f_{x_nx_1} & \cdots & f_{x_nx_n} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & -2 & & & \\ & & & 2 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

Sonuç 9. *M üzerinde tanımlı bir Morse fonksiyonunun herbir kritik noktası yalıtılmıştır.*

Kanıt: p_1 ve p_0, f'nin iki kritik noktası olsun. p_1, p_0 çevresinde bir Morse komşuluğunun içinde olsun ve Morse koordinatlarında $(x_1, \ldots, x_n)$ olarak verilsin. O zaman, Morse Önsavına göre

$$f(p_1) = f(p_0) - x_1^2 - x_2^2 - ... - x_k^2 + x_{k+1}^2 + x_{k+2}^2 + ... + x_n^2$$

olacak. Öte yandan, p_1 bir kritik nokta olduğu için f'nin bu noktadaki türevi sıfır olmalı. Yani:

$$f_j(p_1) = \pm 2x_j = 0, \quad j = 1, \ldots, n$$

(Burada $j \leq k$ ise işaret $-$ diğer durumda $+$). Dolayısıyla $x_1, \ldots, x_n = 0$ olmalı. Parametrizasyon birebir olduğundan, $p_1 = p_0$ olmak zorunda kalır. □

Alıştırma 11. *Tıkız bir manifold üzerinde bir Morse fonksiyonunun sonlu sayıda kritik noktası vardır; gösterin. Ne tür tıkız topolojik uzaylarda yalıtılmış noktalar sonlu sayıda olmak zorunda? Araştırın.*

3.2 Bir uygulama: S^2

Şimdi Morse Lemma kullanarak (sadece onu değil tabi) türevli topolojide önemli bir teorem kanıtlayalım. Kenarı olmayan ve tıkız bir manifolda *kapalı* diyoruz. Manifoldları şu ana kadar zaten kenarsız tanımlamıştık. Manifold kenarını Ders 4.1'de tanımlayacağız.

Teorem 10. *M kapalı (tıkız ve kenarsız) bir 2-manifold ve $f : M \to \mathbb{R}$, tam iki kritik noktası olan bir Morse fonksiyonu olsun. Bu durumda M, S^2'ye difeomorftur.*

Kanıt: Kanıt bu bölümün sonuna kadar sürecek. Yapılacak olan şey kısaca kritik noktaların etrafında Morse komşuluklarını kullanarak dairesel bölgeler tanımlamak ve bu bölgelerin birbirine *yapıştırılmasıyla* manifoldun inşa edildiğini göstermek. İspatlayacağız ki bu dikiş sonucu ortaya çıkan topolojik uzay S^2'ye difeomorftur.

f tıkız bir manifold üzerinde tanımlı bir fonksiyon olduğu için minimum ve maksimum değer aldığı noktalar vardır (Teorem 1). Ayrıca bu noktalarda f'nin türevi sıfır olması gerektiği için bu noktalar teoremde verilen minimum (p_0) ve maksimum (p_1) noktalar olacaktır. Dolayısıyla M'nin bir 2-manifold olduğu bilgisi ve Morse Önsavını kullanarak aldığımız (sırasıyla) V_0 ve V_1 Morse komşuluklarında f fonksiyonu sırasıyla $f(p_0)-x_1^2-x_2^2$ ve $f(p_1)+x_1^2+x_2^2$ olarak ifade edilecek. Şimdi bu komşuluklarda birer alt bölge tanımlayalım:

$$U_0 \doteq \{p \in M : f(p_0) \leq f(p) \leq f(p_0) + \varepsilon\} \subset V_0;$$

$$U_1 \doteq \{p \in M : f(p_1) \geq f(p) \geq f(p_1) + \varepsilon\} \subset V_1.$$

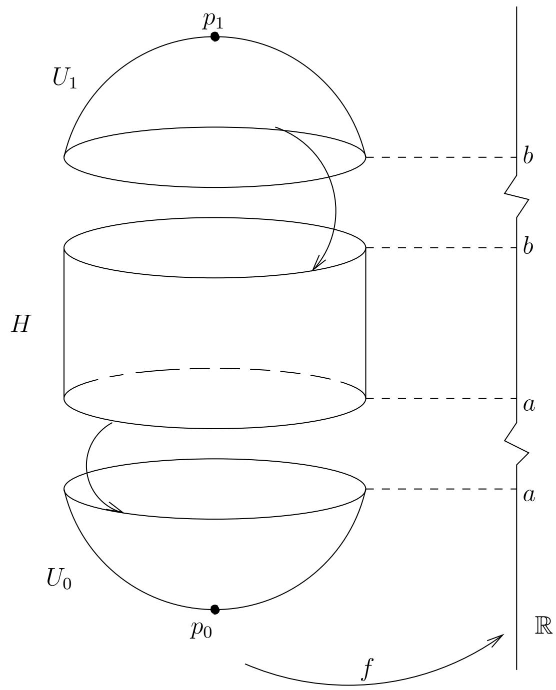
Bu durumda,

$$U_0 \cong \{p \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq f(p) - f(p_i) = x_1^2 + x_2^2 \leq \varepsilon\};$$

$$U_1 \cong \{p \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq f(p_i) - f(p) = x_1^2 + x_2^2 \leq \varepsilon\}$$

olur ki böylece U_0 ve U_1'in birer daireye difeomorf olduğunu görmüş olduk.

Demek ki, indisi 2 ve 0 olan iki kritik nokta etrafında *biri yukarı diğer aşağı bakan* iki tane disk varmış (yukarı ve aşağı sözcükleri aslında soyut bir manifold için bir şey ifade etmiyor). Burdan devam etmek için kanıtı sonra verilecek bir teorem kullanacağız.



Şekil 7: M manifoldu 3 parçanın yapıştırılmasıyla oluşuyor.

Teorem 11. *$f : M \to \mathbb{R}$ bir Morse fonksiyonu olsun. $a < b$ olmak üzere $a, b \in \mathbb{R}$ değerleri f'nin olağan (kritik olmayan) iki değeri olsun. Ayrıca a ile b arasında başka hiçbir kritik değer olmasın. Bu durumda $X_a \doteq f^{-1}(a)$ ve $X_b \doteq f^{-1}(b)$ kümeleri difeomorftur ve $f^{-1}([a,b])$ altuzayı $X_a \times [a,b]$ uzayına difeomorftur.*

Bizim durumumuzda $a = f(p_0) + \varepsilon$ ve $b = f(p_1) - \varepsilon$ seçersek, X_a ve X_b sırasıyla U_0 ve U_1'in kenar çemberleri olacak. Teorem 11 bunlarını birbirine difeomorf olduğunu (ki bariz) ve $H = M - (\text{iç}(X_a) \cup \text{iç}(X_b))$ uzayının $X_a \times [a,b]$ silindirine difeomorf olduğunu söylüyor (Burada iç diyerek bir topolojik uzayın iç kümesini kastediyoruz).

Şu an elimizde üç soyut uzay var: iki tane daire ve bir çembersel silindir. Bu uzaylar *kenarlarından yapıştırılarak* başta verilen M manifoldu elde ediliyormuş (Şekil 7). Bu uzayların nasıl yapıştığını bilmiyoruz. Bunların birbirine yapıştırılıp küre yapılabileceğini göstermek için önce yapıştırmak diyerek ne demek istediğimizi tanımlayalım:

Tanım 11. *X ve Y iki topolojik uzay, $A \subset X$ bir altuzay, $g : A \to Y$ sürekli bir gönderim olsun. $X \amalg Y$ ayrık birleşim uzayı üzerinde, $x \in X$, $y \in Y$ olmak üzere*

$$x \sim x, y \sim y, x \sim y \Leftrightarrow y = g(x)$$

olarak tanımlanan $\sim$ denklik bağıntısını düşünelim. Z kümesi bu bağıntının denklik sınıflarının kümesi, $h : X \amalg Y \to Z$ gönderimiyse herbir noktayı ait olduğu denklik sınıfına götüren örten izdüşüm gönderimi olsun. Z üzerinde şöyle bir topoloji tanımlayalım:

$U \subset Z$ açık kümedir ancak ve ancak $h^{-1}(U)$ $X \amalg Y$'de açık ise.

Böyle tanımlanmış topolojiye bölüm topolojisi *denir. Z topolojik uzayına $X \amalg Y$'nin* bölüm uzayı, *ya da X* ile *Y*'nin *g* gönderimiyle birbirine yapıştırılması *denir. $X \cup_g Y$ olarak gösterilir. h gönderimine* bölüm gönderimi *denir.*

Alıştırma 12. *(Yukarıdaki ve buradaki topolojik tanımlar için örneğin Munkres'e başvurun [Munk].)*
(a) Tanımda Z'ye verilen topolojiyle şöyle verilen topolojinin aynı olduğunu kanıtlayın:

$U \subset Z$ kapalıdır ancak ve ancak $h^{-1}(U)$ $X \amalg Y$'de kapalı ise.

(b) Hangisi daha fazla şey istiyor: Z'ye g'yi sürekli yapacak en basit topolojiyi koymak mı, g'yi bölüm gönderimi yapacak yukarıdaki topolojiyi koymak mı?
(c) Her örten açık (ya da kapalı) gönderimin bölüm gönderimi olduğunu kanıtlayın. Her bölüm gönderimi açık (ya da kapalı) mıdır?

Şimdi kanıtımıza devam edebilmek için türevli topolojiden gelen bir kaç yapıştırma teoremi kullanmamız gerekecek (kanıt için bkz. örneğin [GiPo] ya da [Hirs]). Teoremlerde artık bir manifoldun kenarı kavramını kullanmamız gerekiyor. Daire ya da silindir için şöyle böyle ne kastedildiği açık. Tanımları gelecek derse erteliyoruz.

Teorem 12. *X ve Y pürüzsüz n-manifoldlar olsun. X'in kenarının (∂X) bağlantılı bir parçasından Y'nin kenarının bağlantılı bir parçasına (∂Y) gıcır g difeomorfisi verilsin. X ile Y'nin g gönderimiyle birbirine yapıştırılmasıyla elde edilen uzay da pürüzsüz bir manifolddur.*

Sokaktaki insan diliyle söyleyelim: iki manifoldu kenarlarından bir difeomorfiyle yapıştırırsak, yani o gönderim altında birbirine giden noktaları özdeşleştirip tek nokta gibi görürsek çıkan uzay da pürüzsüz. Bu teorem sürekli ya da C^k kategorilerinde de yazılabilirdi.

Teorem 13. *X_1, X_2, Y_1 ve Y_2 pürüzsüz manifoldlar; $\varphi_1 : X_1 \to X_2$, $\varphi_2 : Y_1 \to Y_2$, $g_1 : \partial X_1 \to \partial Y_1$, $g_2 : \partial X_2 \to \partial Y_2$ difeomorfiler olsun. Eğer $g_2 \circ \varphi_1|_{\partial X_1} = \varphi_2|_{\partial Y_1} \circ g_1$ sağlanıyorsa yani*

$$\begin{tikzcd} \partial X_1 \arrow[r, "\varphi_1|_{\partial X_1}"] \arrow[d, "g_1"'] & \partial X_2 \arrow[d, "g_2"] \\ \partial Y_1 \arrow[r, "\varphi_2|_{\partial Y_1}"'] & \partial Y_2 \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeliyse o zaman

$$X_1 \cup_{g_1} Y_1 \cong X_2 \cup_{g_2} Y_2$$

olur.

Yani, kenarlarından yapışacak manifoldlar yerine bunlara difeomorf başka manifoldları yapıştırırsak, yapıştırma gönderimini de yukarıdaki koşulu sağlamak üzere istediğimiz gibi değiştirirsek, yapışma manifoldun difeomorfi sınıfı değişmez.

Teorem 10'un kanıtına geri dönelim. U_0 ve U_1 diye iki dairemiz ve H diye bir çembersel silindirimiz vardı. Şu bariz iddiayı alıştırma olarak bırakalım:

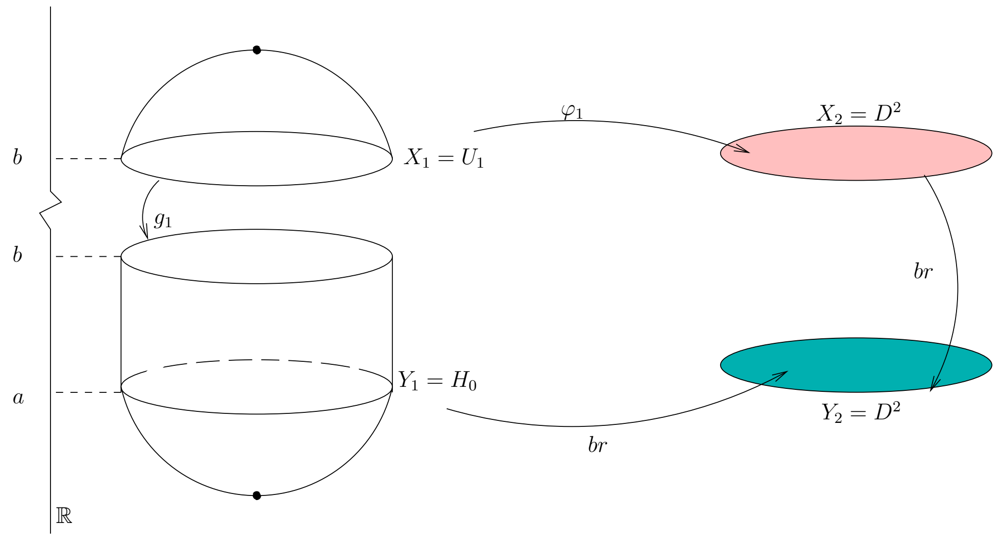
Alıştırma 13. *U_0'ın kenarı ile H'nin bir kenarından bir difeomorfiyle birbirine yapıştırılması sonucu ortaya çıkan kenarlı manifoldun daireye difeomorf olduğunu kanıtlayın.*

Alıştırmada çıkan daireye H_0 diyelim. Şimdiki savımız H_0 ile U_1 daireleri kenarlarından yapıştırıldığında çıkan manifoldun aynen $\mathbb{R}^3$'teki iki daireyi yapıştırmak gibi küre olduğu (Şekil 8).

Teorem 13'ü kullanacağız. Teoremdeki $X_1 = U_1$, $Y_1 = H_0$ olsun. X_2 ve Y_2 de birim daire D^2 olsun. Problemin içinde bilmediğimiz bir $g_1 : \partial X_1 \to \partial Y_1$ var. Teoremdeki g_2 ve φ_2'yi birim difeomorfiler seçelim. Teoremi kullanabilmek için

$$\begin{tikzcd} \partial X_1 \arrow[r, "\varphi_1|_{\partial X_1}"] \arrow[d, "g_1"'] & \partial X_2 \arrow[d, "br"] \\ \partial Y_1 \arrow[r, "br"'] & \partial Y_2 \end{tikzcd}$$

diyagramını değişmeli yapacak bir $\varphi_1 : X_1 \to X_2$ bulmalıyız. Böyle bir difeomorfi varsa, Teorem 13 üstteki yapıştırmanın sonucunun alttaki yapıştırmanın



Şekil 8: İki daire kenarlarından hangi difeomorfiyle yapışırsa yapışsın küre verir.

sonucuna yani S^2'ye (Alıştırma 15) difeomorf olduğunu söyleyecek ve kanıt bitecek. Öyle bir φ_1'in varlığını Alıştırma 14 gösteriyor. □

Alıştırma 14. *Çemberden kendisine verili herhangi bir g_1 difeomorfisi için $\varphi_1|_{S^1} = g_1$ olacak biçimde daireden daireye bir φ_1 difeomorfisi var olduğunu kanıtlayın. Bu difeomorfiyi gıcır yapmaya çalışın. Analitik yapabilir misiniz?*

Alıştırma 15. *D^2 birim dairesi $\mathbb{R}^2$'nin, S^2 birim küresi $\mathbb{R}^3$'ün altuzayları olmak üzere $D^2 \cup_{br} D^2$'nin S^2'ye homeomorf olduğunu gösterin (burada br, ∂D^2'den kendisine birim gönderim). Difeomorf olduklarını daha ileride geri dönüp kanıtlayın.*

Alıştırma 16. *n boyutlu kapalı (tıkız ve kenarsız) bir manifoldun üstündeki bir Morse fonksiyonunun iki kritik noktası varsa bu manifold S^n'ye homeomorf mu olmak zorunda? S^2 için yaptığımız kanıta benzer bir kanıt yapmak isteseniz hangi teoremlere ihtiyaç duyarsınız? Araştırın.*

Bu dersin meyvelerini toplayalım şimdi:

Alıştırma 17. *$A = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 | z_1 \cdot z_2 = 1\}$ kompleks düzlemde bir hiperyüzey olsun. Bu yüzey üzerinde tanımlı bir Morse fonksiyonu inşa edip, bu yüzeyin $S^1 \times I$'ya difeomorf olduğunu gösterin.*