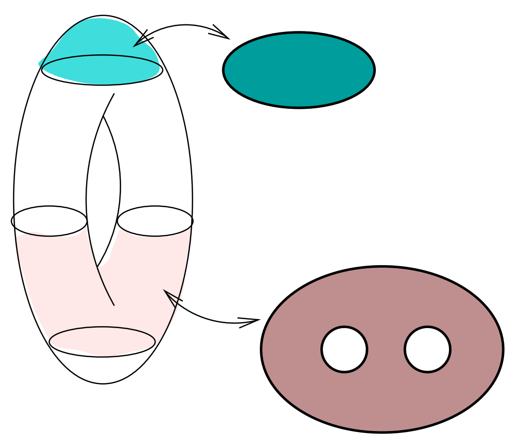
Ders 4: Morse Önsavının kanıtı I

Bu derste geçen ders tanımlamaktan sürekli kaçtığımız kenarlı manifoldlardan söz edeceğiz ve daha sonra Morse Önsavının kanıtı için gerekli birkaç önsavı kanıtlayacağız. İlk bölüm için bakılabilecek kaynaklar [Mil1] ya da [GuPo].

4.1 Kenarlı manifold

Morse kuramı kullanarak manifoldları inceleyeceğimiz zaman, başlangıç manifoldumuz kenarlı olmasa bile kenarlı manifoldlara ihtiyaç duyacağız. Geçen ders bir küreyi iki daire ve bir silindire ayırmıştık. Tüm bunlar birer kenarlı manifold. Kenarı olmayan bir manifoldu anlamak için Morse Kuramı çerçevesinde izleyeceğimiz strateji şöyle olacak. Verilen manifold için bir Morse fonksiyonu bulacağız. Kritik noktalarını sınıflandırıp karşılık gelen Morse komşulukları yardımıyla manifoldu parçalara böleceğiz. Parçalar kenarlı manifoldlar olacak. Bunların birbirine nasıl yapıştığını anlayarak manifoldun nasıl inşa edildiğini göreceğiz (Şekil 9).



Şekil 9: Simitin gördüğümüz yükseklik fonksiyonuna göre kimi parçaları.

Kenarlı manifoldları da aynen manifoldlarda yaptığımız gibi $\mathbb{R}^n$'nin açık altuzaylarıyla parametrize edeceğiz fakat bu sefer alt uzaylar $\mathbb{R}^n$'nin üst yarısında olacak. Üst yarısı derken $\mathbb{H}^n \doteq \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_n \geq 0\}$ kümesini ve üstünde $\mathbb{R}^n$'den tetiklenen topolojiyi kastediyoruz. $\mathbb{H}^n$'nin $\mathbb{R}^n$'de topolojik kenarını $\partial\mathbb{H}^n$ olarak göstereceğiz. Bu durumda bir parametrizasyonla $\mathbb{H}^n$'nin kenarına denk gelen noktaların kümesine manifoldun kenarı denecek.

Tanım 12. *M Hausdorff ve ikinci sayılabilir ise ve M'nin her noktası çevresinde $\mathbb{H}^n$'de açık bir kümeden kalkıp gelen bir homeomorfi bulunabiliyorsa M'ye* kenarlı, n boyutlu topolojik manifold *denir.*

Eğer M'nin bir noktası bir parametrizasyon altında $\partial\mathbb{H}^n$'ye düşüyorsa o noktaya M'nin bir kenar noktası, *bu tür noktaların uzayına da* M'nin kenarı *denir ve ∂M olarak gösterilir (Şekil 10).*

Alıştırma 18. *Kenarlı bir topolojik manifoldda kenar noktası olmanın iyi tanımlı olduğunu gösterin; yani M kenarlı bir manifoldsa ve $p \in M$ bir parametrizasyonla $\partial\mathbb{H}^n$'ye düşüyorsa,* her *parametrizasyonla $\partial\mathbb{H}^n$'ye düşeceğini gösterin (Bu soru zor. Yeterince düşündükten sonra asıl neyin kanıtlanması gerektiğini bulun ve sonra kitaplara danışın).*

Dikkat: kenarlı bir topolojik manifoldda her parametrizasyonun kalkış kümesi $\partial\mathbb{H}^n$'ye değmek zorunda değil (Şekil 10).

Şimdi, daha önce yaptığımız gibi geçiş gönderimlerinin türevli olmasını isteyeceğiz ama bu koşul $\mathbb{H}^n$'nin kenarında sorun çıkarabilir. Bu sorunu Tanım 7'deki gibi halledeceğiz.

Tanım 13. *$M \subset \mathbb{R}^K$ kenarlı bir topolojik n-manifold olsun. Bir $p \in \partial M$ kenar noktası; $\mathbb{H}^n$'de açık bir V; p'yi içeren, M'de açık bir U ve burada çalışan $\phi : V \to U$ parametrizasyonu seçelim. Eğer her p ve olası her bu tarz seçim için φ^{-1} gönderimi p çevresinde $\mathbb{R}^K$'de açık bir W kümesinden $\mathbb{R}^n$'ye tam rank olarak türevli (C^k, gıcır) bir biçimde genişletilebiliyorsa M'ye* kenarlı, türevli manifold *denir.*

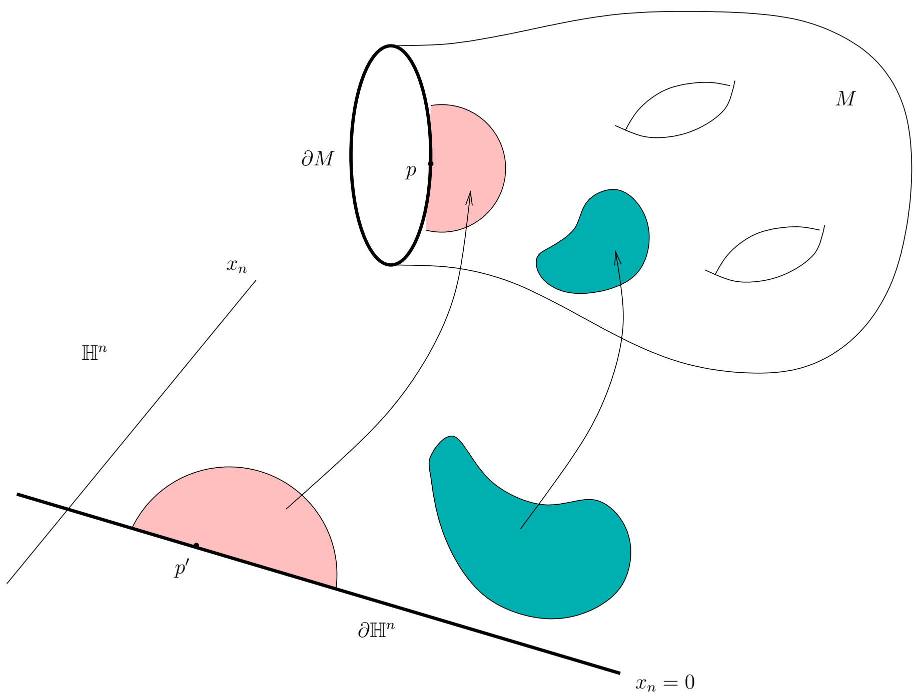
Kısacası parametrizasyonların kalkış ve varış kümelerini kenarlar civarında biraz genişleterek türevin bir komşulukta tanımlanmasına olanak veriyoruz.

Manifold kenarı hakkında bazı gözlemler:

Alıştırma 19. *Topolojik kenar ile manifold kenarı birbirinden farklıdır*

Alıştırma 20. *Türevli manifoldun kenarı türevli manifolddur.*

Alıştırma 21. *$\partial(\partial M) = \varnothing$.*



Şekil 10: Kalın çizgiler her iki manifoldun kenarlarını gösteriyor. p bir kenar noktası.

4.2 Morse Önsavının kanıtı için birkaç önsav

Şimdi Morse Önsavının kanıtına başlayalım.

Kanıt (Morse Önsavı). Kanıtı $n = 2$ için yapacağız fakat $n > 2$ için kanıt aynı adımlarla genelleştirilebilir. Önce önsavı hatırlayalım:

$f : M \to \mathbb{R}$ Morse olsun. p_0 f'nin bir kritik noktasıysa, p_0 çevresinde öyle bir koordinat sistemi vardır ki orada

$$f = f(p_0) - x_1^2 - \ldots - x_k^2 + x_{k+1}^2 + \ldots + x_n^2$$

olur.

Şimdi $(0, 0)$ noktasını p_0'a götüren herhangi bir h parametrizasyonuyla başlayalım. Aşağıda gösterim uzamasın diye, $f \circ h$ fonksiyonunu yine f harfiyle gösteriyoruz.

f'nin $0 = (0,0)$'daki Hessianı

$$Hf(0) = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{12} & f_{22} \end{pmatrix}$$

idi. Hessianın 0'da tekil olmadığını biliyoruz.

Önsav 14. *0 çevresinde öyle bir koordinat dönüşümü yapılabilir ki* $f_{11}(0) \neq 0$ *olur.*

Kanıt. Eğer $f_{11}(0) = 0$ ise o zaman $H(f)(0)$ tekil olmadığı için $f_{12}(0) \neq 0$ olmalı. Eğer $f_{22} \neq 0$ ise, $x' = y$ ve $y' = x$ kordinat dönüşümü işimizi görür. Yani transformasyon matrisi

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

olacak. Böylece yeni Hessian

$$H' = J^T H J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{22} & f_{21} \\ f_{12} & 0 \end{pmatrix}$$

olacak (Teorem 6'nın kanıtına bakın). Eğer $f_{22} = 0$ ise bu sefer $x' = x + y$, $y' = x - y$ dönüşümü (yani $\mathbb{R}^2$'de $\pi/4$ radyanlık dönüş ve biraz uzama) ile:

$$J = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad J^T H J = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} f_{12} & 0 \\ 0 & -f_{12} \end{pmatrix}$$

olur. □

Ne işe yaradığı şimdi belli olmayan ama ileriki adımlarda sık sık kullanacağımız bir önsavla dersi bitirelim.

Önsav 15. $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $u(0,0) = 0$ *verilsin. Bu* u *için* $\mathbb{R}^2$*'den* $\mathbb{R}$*'ye öyle* g *ve* h *fonksiyonları vardır ki*

$$u(x,y) = x \cdot g(x,y) + y \cdot h(x,y)$$

olur. Üstelik $u_1(0,0) = g(0,0)$ *ve* $u_2(0,0) = h(0,0)$ *sağlanır.*

Kanıt. u fonksiyonunu şöyle yazalım:

$$u(x,y) = u(x,y) - u(0,0) = \int_0^1 \frac{d}{dt} u(tx,ty)dt = \int_0^1 \left(x \cdot u_1(xt,ty) + y \cdot u_2(xt,ty)\right) dt.$$

İstenen fonksiyonları

$$g(x,y) = \int_0^1 u_1(xt,ty)dt \quad \text{ve} \quad h(x,y) = \int_0^1 u_2(xt,ty)dt$$

olarak tanımlarsak, $u(x,y) = x \cdot g(x,y) + y \cdot h(x,y)$ elde edilir. Ayrıca,

$$g(0,0) = \int_0^1 u_1(0,0)dt = u_1(0,0) \cdot t|_0^1 = u_1(0,0)$$

ve

$$h(0,0) = \int_0^1 u_2(0,0)dt = u_2(0,0) \cdot t|_0^1 = u_2(0,0)$$

olur. □

Alıştırma 22. *Yukarıdaki önsavı bir* $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *fonksiyonu için yazıp kanıtlayın.*