Ders 5: Morse Önsavının kanıtı II

5.1 Kanıt

Bu derste Morse Önsavının kanıtına devam edeceğiz ve ardından Morse fonksiyonlarının manifold üzerinde var olup olmadığı ve "yoğunluğu" hakkında konuşacağız.

Geçen dersin sonunda kanıtladığımız Önsav 15'te bir u fonksiyonunu g ve h fonksiyonları cinsinden yazmıştık. Şimdi Morse Önsavının hipotezinde bize verilen f fonksiyonu için aynı önsavı çalıştırıp g ve h fonksiyonlarını bulduktan sonra g ve h için yine aynı önsavı çalıştıracağız. Bunun için $g(0,0) = 0 = h(0,0)$ olması gerekiyor ama zaten öyle çünkü $f_1(0,0) = 0 = f_2(0,0)$, yani $(0,0)$ bir kritik nokta! Böylece önsav sayesinde

$$g(x,y) = x \cdot h^{11}(x,y) + y \cdot h^{12}(x,y), \quad \big(h^{11}(0,0) = g_1(0,0), h^{12}(0,0) = g_2(0,0)\big)$$

ve

$$h(x,y) = x \cdot h^{21}(x,y) + y \cdot h^{22}(x,y), \quad \big(h^{21}(0,0) = h_1(0,0), h^{22}(0,0) = h_2(0,0)\big)$$

eşitliklerini sağlayan $h^{11}, h^{12}, h^{21}, h^{22}$ fonksiyonlarını buluruz. O halde;

$$\begin{aligned} f(x,y) &= xg + yh \\ &= x(xh^{11} + yh^{12}) + y(xh^{21} + yh^{22}) \\ &= x^2h^{11} + xy(h^{12} + h^{21}) + y^2h^{21} \\ &= x^2H^{11} + xyH^{12} + y^2H^{21} \end{aligned}$$

olur. Burda $H^{11} = h^{11}$, $H^{22} = h^{22}$ ve $H^{12} = (h^{12} + h^{21})$ olarak alındı. Bu arada,

$$\begin{aligned} H^{11}(0,0) &= h^{11}(0,0) = \left(\int_0^1 g_1(xt,ty)dt\right)_{(x,y)=(0,0)} \\ &= \int_0^1 tf_{11}(0,0)dt = \frac{t^2}{2}f_{11}(0,0)\Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{2}f_{11}(0,0) \end{aligned}$$

olur. Demek ki $H^{11}(0,0)$ sıfır değil. Şimdi yeni bir koordinat sistemini

$$X = \sqrt{|H^{11}|}(x + \frac{H^{12}}{H^{11}}y) \text{ ve } Y = y$$

olarak seçelim. $\frac{\partial X}{\partial x}(0,0) = \sqrt{|H^{11}(0,0)|} \neq 0$ olduğundan bu dönüşüm gerçekten bir difeomorfidir (koordinat dönüşümü). Burda içersinde mutlak değer içeren bir ifadenin türevi alındığı için mutlak değerle ilgili bir sorun çıkacağı düşünülebilir. Fakat $|H^{11}|$ (0,0) noktasında 0'dan büyük olduğu için böyle bir sorun yoktur.

Şu hesapları yapınca sorunun bittiğini göreceğiz. Önce:

$$\begin{aligned} X^2 &= |H^{11}|(x^2 + 2xy\frac{H^{12}}{H^{11}} + \left(\frac{H^{12}}{H^{11}}\right)^2 y^2) \\ &= \sigma_1(H^{11}x^2 + 2xyH^{12} + \frac{(H^{12})^2}{H^{11}}y^2). \end{aligned}$$

Burda $\sigma_1 \in \{-1, +1\}$, H^{11}'in işareti. Böylece,

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \sigma_1 X^2 - \frac{(H^{12})^2}{H^{11}}Y^2 + H^{22}Y^2 \\ &= \sigma_1 X^2 + \frac{H^{22}H^{11} - (H^{12})^2}{H^{11}}Y^2 \\ &= \sigma_1 \tilde{X}^2 + \sigma_2 \tilde{Y}^2 \end{aligned}$$

elde ediyoruz. Burda

$$\tilde{X} = X \quad \text{ve} \quad \tilde{Y} = \sqrt{\frac{H^{22}H^{11} - (H^{12})^2}{H^{11}}}$$

yeni koordinatlar ve σ_2 bu karekök içindeki ifadenin işareti. Böylece Morse Önsavını kanıtladık: birkaç koordinat dönüşümü ardından öyle bir koordinat sistemine yerleştik ki bu koordinatlarda $(0,0)$ noktası yakınlarında f artı/eksi kareler toplamı olarak yazıldı. *Morse Önsavının kanıtının sonu* □

5.2 Morse fonksiyonlarının varlığı ve çokluğu

Demek ki Morse fonksiyonları, kritik noktalarında bile yeterince iyi davranıyormuş. Ama acaba herhangi bir manifold verildiğinde böyle güzel Morse fonksiyonları bulabiliyor muyuz? Yanıt evet, hem de tıkız, kapalı manifoldlarda herhangi bir $g : M \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna istediğimiz kadar *yakın* bir Morse fonksiyonu bulabiliyoruz. Fakat bunu göstermek için bu ders ve önümüzdeki ders önce bir kaç önsav kanıtlayacağız.

İlk olarak, yakın demekle ne demek istiyoruz?

Tanım 14. *$K \subset \mathbb{R}^n$ olmak üzere, K üzerinde gerçel değerli ve iki kez sürekli türevlenebilir fonksiyonların kümesini $C^2(K, \mathbb{R})$ olarak gösterelim. İki fonksiyon $\phi, \psi \in C^2(K, \mathbb{R})$ iken, bir $\varepsilon > 0$ verildiği durumda her $p \in K$ ve $1 \leq i, j \leq n$ için aşağıdaki koşullar sağlandığında ϕ ψ'ye ε* kadar C^2-yakınlığında *ya da ϕ ψ'ye C^2* bakımından ε'dan yakın *diyoruz:*

$$|\phi(p) - \psi(p)| < \varepsilon$$
$$|\phi_i(p) - \psi_i(p)| < \varepsilon$$
$$|\phi_{ij}(p) - \psi_{ij}(p)| < \varepsilon$$

Önsav 16. *$U \subset \mathbb{R}^n$ açık ve $f : U \to \mathbb{R}$ gıcır olsun. Öyle bir $a = (a_1, a_2..., a_n) \in R^n$ vardır ki,*

$$\hat{f}(p) = f(p) - \sum_{k=1}^{x} a_k \cdot x_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

Morse'tur ve $|a_k|$'ler istenildiği kadar küçük seçilebilir.

Burda şuna dikkat edelim: bu önsav bütün manifold üzerinde değil sadece manifoldda tanımlı bir açık komşulukta geçerli. Bu fonksiyonun manifoldu kaplayan diğer açık örtüler için çalışıp çalışmayacağı yönünde bir bilgimiz henüz yok.

Kanıt. $\hat{f}$ fonksiyonunun bir p noktasındaki türevi

$$D\hat{f}(p) = Df(p) - \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

ve Hessian matrisi $H\hat{f}(p) = Hf(p)$ olacak. Böylece eğer p', $\hat{f}$'nın kritik noktası ise

$$Df(p') = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

koşulu ve p''nün dejenere olmaması için de $Hf(p') \neq 0$ koşulları sağlanmalı. Dolayısıyla bizim elimizde bir

$$Df : L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^n$$

operatörü var; biz bu operatör için öyle bir $a \in \mathbb{R}^n$ istiyoruz ki $Df(p) = a$ koşulunu sağlayan p'ler için $Hf(p)$ tekil olmasın. Eğer $Df = g$ diye bir isimlendirme yaparsak aşağıdaki çok güçlü *Sard teoremi* bize bu koşulun sağlanabileceği yönünde güvence verir ve kanıtımız biter. $\square$

Sard teoremi çok güçlü bir teorem. Kanıtı da zor değil. [Mil1] ya da [Hirs] kullanılabilir.

Teorem 17. (Sard teoremi) *$g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ türevlenebilir fonksiyonunun kritik değerleri kümesinin $\mathbb{R}^n$'de ölçüsü sıfırdır.*