# Ders 6: Morse fonksiyonlarının yoğunluğu

Bu derse, geçen ders çıtlattığımız Morse fonksiyonlarının *yoğunluğunu* söyleyen teorem için gereken önsavları tartışmakla başlayacağız. Ardından teoremi açıkça yazıp kanıtını konuşacağız. [Mats]'ı izliyoruz.

**Önsav 18.** *Herhangi bir tıkız $M$ manifoldu sonlu sayıda tıkız $K_i$ alt uzayıyla örtülebilir.*

**Kanıt.** Önce aşağıdaki alıştırmayı kullanarak herbir nokta için o noktayı içine alan $V_x \subset K_x \subset U_x$ kümelerini bulun. Burda $V_x$ ve $U_x$ açık, $K_x$ tıkız. Daha sonra $V_x$'lerden sonlu tanesinin $M$'yi örttüğünü fark edip kanıtı bitirin. $\square$

**Alıştırma 23.** *$U$ altuzayı yerel olarak tıkız bir Hausdorff uzayında açık olsun. $U$ içinde öyle bir açık küme vardır ki kapanışı hem tıkızdır hem de $U$'nun içindedir.*

**Önsav 19.** *$K$, bir $M$ manifoldunun tıkız bir altmanifoldu olsun; $g : M \to \mathbb{R}$ gıcır ve $g|_K$ Morse olsun. Eğer yeterince küçük bir $\varepsilon > 0$ için $f : M \to \mathbb{R}$ gönderimi, $C^2$ bakımından $g$'ye $\varepsilon$'dan daha yakınsa, $f|_K$ de Morse'tur.*

**Kanıt.** $g|_K$ Morse demek, $g$'nin $K$'de dejenere noktası yok demek. Bunu, $p \in K$ bir kritik nokta olmak üzere şöyle de ifade edebiliriz:

$$s(p) = \left|\frac{\partial g}{\partial x_1}\right| + \cdots + \left|\frac{\partial g}{\partial x_n}\right| + |\det H(g)| > 0.$$

Dejenere olmayan bir kritik nokta olmak için fonksiyonun kısmi türevleri sıfır olmalı ve Hessian'ın determinantı pozitif olmalı. Dolayısıyla $s : K \to M$ gönderimi $p$'de yukarıdaki ilişkiyi sağlamalı.

Şimdi, öncelikle

$$\left|\frac{\partial g}{\partial x_i}\right| = \left|\frac{\partial g}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial x_i}\right| \leq \left|\frac{\partial g}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial x_i}\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|$$

olduğundan

$$\sum_i \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| \geq \sum_i \frac{\partial g}{\partial x_i} - \sum_i \frac{\partial g}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial x_i} \geq \sum_i \frac{\partial g}{\partial x_i} - n\varepsilon.$$

Aynı şekilde determinantlar için de

$$|\det H(f)| \geq |\det H(g)| + |\det H(g) - \det H(f)|.$$

Şimdi tıkız uzaylarda sürekli operatörler sınırlı olduğundan

$$\begin{aligned} |\det H(g)(p) - \det H(f)(p)| &\leq ||\det|| \cdot |H(g)(p) - H(f)(p)| \\ &\leq M_d \cdot ||H|| \cdot |g - f| \\ &\leq M_d \cdot M_h \varepsilon \end{aligned}$$

buluruz (burda $M_d, M_h \in \mathbb{R}^+$). Dolayısıyla

$$\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + |\det H(f)| \geq \sum_i \frac{\partial g}{\partial x_i} + |\det H(g)| - n \cdot \varepsilon - M_d \cdot M_h \cdot \varepsilon = \rho - n \cdot \varepsilon$$

elde ederiz. $\rho$ pozitif bir sayı olduğu için, $\varepsilon$ yeterince küçük seçilerek Hessian'ın tekil olmaması sağlanır. □

Her fonksiyonun istenildiği kadar yakınında bir Morse fonksiyonu var:

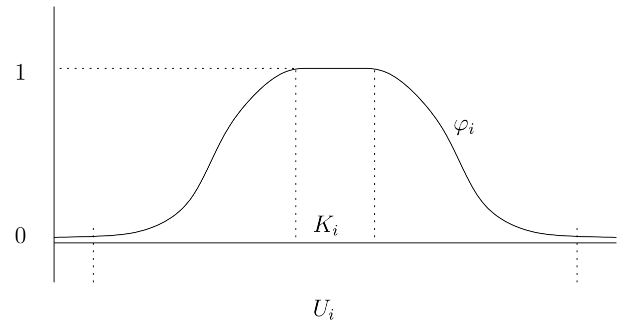
**Teorem 20.** *Kapalı manifoldlarda herhangi bir $g : M \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna $C^2$ bakımından istenildiği kadar yakın bir Morse fonksiyonu vardır.*

**Kanıt.** Bunun için önce geçen dersteki Önsav 18'i kullanarak manifoldu bir $\{U_i\}_{i=1}^n$ sonlu açık örtüsü ve $\{K_i : K_i \subseteq U_i\}_{i=1}^n$ sonlu tıkız örtüsü ile örtelim.

Sonra 5. dersteki Önsav 16'yı kullanarak $M$ üzerinde tanımlı reel değerli bir $g$'ye $U_i$'de $C^2$ bakımından yakın ve Morse bir $f_i$ bulabiliriz öyle ki $a^i \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere $f_i : U_i \to \mathbb{R}$, $f_i(p) = g(p) + (a^i \cdot p)\, \varphi_i(p)$ olur. Bu ifadenin anlamlı olabilmesi için $p$ noktasını aynı zamanda bir koordinat sistemi aracılığıyla $\mathbb{R}^n$'de düşünüyoruz. Ayrıca burda $\varphi_i$ fonksiyonu $K_i$'de 1 değerini alan, $U_i \setminus K_i$'de değeri düşen ve $U_i$ dışarsında sıfır değerini alan sürekli bir fonksiyon (Şekil 11). Şekli yüzünden bu fonksiyona *şapka fonksiyonu* diyeceğiz. Son olarak $U_i$ dışarsında ise $f_i = g$ olsun.

**Alıştırma 24.** *Yukarıdaki $\varphi_i$ şapka fonksiyonunu gıcır bir biçimde inşa edin. Bu fonksiyonlar analitik yapılabilir mi?*

Şimdi adım adım *dikme* işlemi yapalım. $l$'inci adımda $C_l = K_1 \cup K_2 \cup \ldots \cup K_l$, $f_l : M \to \mathbb{R}$ $g$'ye yakın ve $C_l$'de Morse olsun. O zaman $p \in U_{l+1}$ için $f_{l+1}(p) = f_l(p) + (a^{l+1} \cdot p)\, \varphi_{l+1}(p)$, $U_{l+1}$ dışındaysa $f_{l+1} = f_l$ olsun. Yani $f_1$'i




Şekil 11: $\varphi_i : U \to \mathbb{R}$ basamak fonksiyonu

yavaş yavaş açık kümelere genişleterek $C_{l+1}$ gibi daha geniş bir tıkız küme üzerinde Morse hale getirmeye çalışıyoruz.

Örtülerimiz sonlu olduğundan böyle bir dikme işlemi ardından elde edilen $f = f_n$ fonksiyonu $M$'de tanımlı $g$'ye $C^2$ bakımından yakındır. Bu fonksiyon $C_n = M$'de Morse gibi gözükmektedir. Fakat Morse özelliği için dikkat etmemiz gereken bir nokta var: iki farklı $K_i$ kümesinin birbiri ile kesiştiği durumlar. Bu durumda farklı Morse fonksiyonları üstüste geleceği için, $a$ çarpanları toplanarak istemediğimiz kadar büyüyebilir. Fakat unutmayalım ki Morse fonksiyonlarının inşasında kullandığımız $a_i$ çarpanları istediğimiz kadar küçük seçebiliyorduk. Bu kesişen $N$ tane $f_i$ fonksiyonunun çarpanlarının en küçüğü $a$ olsun. Şimdi bu çarpanların hepsini $\frac{a}{N}$ ile değiştirdiğimiz zaman bu fonksiyonlar hem kesişim alanında hem de dışarsında Morse olma özelliğini koruyacaktır. $\square$