Ders 7: Teğet demetleri

Şimdi teğet demetlerinden bahsedecegiz. Teğet demeti aracılığıyla, bir manifold üzerinde türevli bir vektör alanını iyice tanımlayabileceğiz. Bunu yapmaktaki amacımız, ileriki derslerde, üzerinde bir Morse fonksiyonu verilmiş bir manifoldun topolojisini, fonksiyona karşılık gelen bir vektör alanı yardımıyla anlamak olacak.

Bir manifoldun *teğet demeti*, manifoldun her noktasındaki her *vektörü* eleman olarak kabul eden bir manifolddur. Ama bir manifoldun bir noktasında vektör ne demek? Bunu, bir cebircinin, fizikçinin ve geometricinin gözünden üç farklı yolla inşa edip, bu inşaların denkliğini göstereceğiz. Burası için kaynak [Spi1] olabilir.

7.1 Teğet vektör ve teğet demetinin cebirci inşası

M tıkız, sınırlı bir manifold ve $p \in M$ olsun. p çevresinde iki parametrizasyon alalım: $g : U_{p'} \subset R_1 = \mathbb{R}^n \to U_p$ ve $h : U_{p''} \subset R_2 = \mathbb{R}^n \to U_p$ olsun. Burda $g(p') = p$ ve $h(p'') = p$. Ayrıca u ve v, p' ve p'' noktalarında $\mathbb{R}^n$'ye teğet vektörler olsun: $u \in T_{p'}R_1$, $v \in T_{p''}R_2$

Cebirci inşasında manifold üzerindeki bir teğet vektörü, $(h, v)_p$ ikilileriyle, yani parametrizasyon uzayından bir teğet vektörü ve o uzaydaki noktaları manifolda atan parametrizasyon çiftiyle gösteriyoruz.

Şimdi, türev operatörü kalkış kümesindeki teğet vektörlerini, varış kümesindeki teğet vektörlere götürecekti. Öyleyse iki ayrı parametrizasyondan gelen teğet vektörler için şöyle bir denklik bağıntısı kurmak makuldür:

$$(h, v)_p \sim (g, u)_p \Leftrightarrow D(h^{-1} \circ g)(g^{-1}(p))u = v.$$

Bu bağıntıyı bir inceleyelim önce. $D(h^{-1} \circ g)$ gönderimi, R_1'de bir $g^{-1}(p)$ noktasında tanımlı ve o noktanın teğet uzayındaki vektörleri R_2 uzayında $h^{-1}(p)$'nin teğet uzayındaki vektörlere götüren bir operatör oluyor.

Alıştırma 25. *Yukarıdaki bağıntının bir denklik bağıntısı olduğunu gösteriniz.*

M'nin teğet demeti manifoldunu tüm bu denklik sınıflarının kümesi olarak inşa edeceğiz ve TM olarak göstereceğiz:

$$TM \doteq \left\{ [(h, v)_p] \,|\, p \in M, h : \mathbb{R}^n \to M, v \in T_{h^{-1}(p)}\mathbb{R}^n \right\}.$$

TM'nin üzerine, aşağıdaki π izdüşüm gönderimini sürekli yapan en kaba topolojiyi koyuyoruz:

$$\pi : TM \to M, [h, v]_p \mapsto p.$$

Bu topoloji için bir temel, $\{\pi^{-1}(U) | U \subset M \text{ açık}\}$ topluluğudur.

Alıştırma 26. *A bir küme ve X bir uzay olmak üzere $f : A \to X$ gönderimini sürekli yapan en kaba topoloji tektir, gösterin. Burada en kaba demek, f'yi sürekli yapan tüm topolojilerin içinde yer almak demek. Bu topolojiyle f'nin bir bölüm gönderimi olduğunu gösterin. En kaba topolojinin bir temelinin $\{\pi^{-1}(U) | U \subset X \text{ açık}\}$ olduğunu gösterin.*

Alıştırma 27. *Yukarıdaki topolojiyle TM'nin bir manifold olduğunu gösterin.*

Ayrıca M'nin p'de teğet uzayını eskisi gibi $T_pM \doteq \{[h, v]_p\}$ olarak gösteriyoruz. T_pM'ye bir vektör uzayı yapısı verilebilir. İşlemleri şöyle tanımlayabiliriz:

$$\begin{aligned} [h, v]_p + [g, u]_p &= [g, D(g^{-1} \circ h)(h^{-1}(p))v + u], \\ r[h, v]_p &= [h, rv]_p. \end{aligned}$$

Alıştırma 28. *Toplamın iyi tanımlı olması için $[g, D(g^{-1}\circ h)(h^{-1}(p))v+u] = [h, D(h^{-1}\circ g)(g^{-1}(p))u+v]$ olması gerekir. Bunun böyle olduğunu ve T_pM'nin diğer vektör uzayı belitlerini sağladığını gösteriniz.*

7.2 Fizikçi inşası

Bu inşayı bir parçacığın manifold üzerindeki bir hareket eğrisine herhangi bir noktada teğet olan vektörü tanımlayarak yapacağız. Bu tanımı yapmaktaki motivasyon, dinamik bir sistemde bir parçacığın hareketini incelerken bir kuvvet alanının anlık etkisini izlemek. M manifoldunda herhangi bir p noktasından geçen herhangi bir türevli eğri γ alalım:

$$\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M, \gamma(0) = p, p \in M.$$

M'de türevli eğriler kümesi üstünde şöyle bir denklik kuralım:

$$\alpha \sim \beta \Leftrightarrow D\alpha(0) = D\beta(0).$$

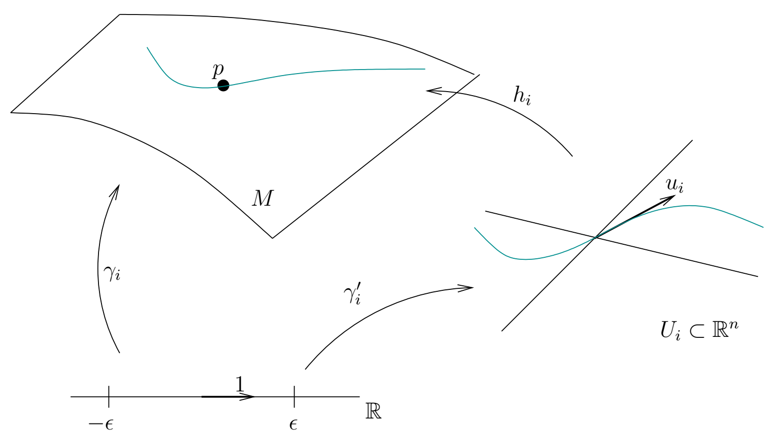
Böylece teğet demeti manifoldunu şöyle tanımlıyoruz:

$$TM \doteq \{M\text{'deki tüm türevli eğriler}\} / \sim$$

Bu tanımın cebirci inşasıyla örtüştüğünü görelim. $i = 1, 2$ olmak üzere $\gamma_i : \mathbb{R} \to U_i \subset \mathbb{R}^n, 0 \mapsto 0$ eğrilerini ve $h_i : U_i \to M, 0 \mapsto p$ parametrizasyonlarını alalım öyle ki $\gamma_i = h_i \circ \gamma_i'$ eşitlikleri sağlansın (Şekil 12). $u_i = Dh_1(0)(1) \in T_0\mathbb{R}^n$ olsun. O zaman

$$\begin{aligned}\gamma_1 \sim \gamma_2 \quad &\Leftrightarrow \quad Dh_1(0) \circ D\gamma_1'(0)(1) = Dh_2(0) \circ D\gamma_2'(0)(1) \\ &\Leftrightarrow \quad Dh_1(0)(u_1) = Dh_2(0)(u_2) \\ &\Leftrightarrow \quad [h, u_1]_p \sim [h_2, u_2]_p\end{aligned}$$

buluruz.



Şekil 12:

7.3 Geometrici inşası

Bu inşada, bildiğimiz türev ile ilişkili *derivasyon* denen bir nesneden faydalanacağız. Bunlar, manifoldun her noktadaki teğet uzayını geren vektörleri meydana getirecek. M manifoldunun p noktasındaki C^∞ fonksiyonların uzayını $C^\infty(M, p)$ olarak gösterelim.

Tanım 15. *Her $f, g \in C^\infty(M, p)$ için aşağıdaki özellikleri sağlayan $l : C^\infty(M, p) \to C^\infty(M, p)$ gönderimine p noktasında bir* (doğrusal) derivasyon *denir:*
(1) $l(rf) = rl(f),\ r \in \mathbb{R}$;
(2) $l(f \cdot g) = f \cdot l(g) + g \cdot l(f)$;
(3) $l(f + g) = l(f) + l(g)$.

l ve k derivasyonları ve $r \in \mathbb{R}$ için, $(l+k)f = l(f) + k(f)$ ve $(rl)(f) = r(l(f))$ ($r \in \mathbb{R}$) olarak tanımlanan iki işlemle birlikte, bir noktadaki tüm derivasyonlar kümesi bir vektör uzayı olur.

p noktasındaki herbir derivasyona M'nin p'de teğet vektörü denir. l_p, p noktasında bir derivasyon olmak üzere, M'nin teğet demetini de, tüm (l_p, p) ikililerinin kümesi olarak tanımlanır.

Teorem 21. *Her $p \in M$ için en az bir teğet vektörü (derivasyon) vardır.*

Kanıt. p çevresinde bir $h = (x_1, \ldots, x_n)$ yaması alalım. O zaman Tanım 5'te tanıttığımız $\frac{\partial}{\partial x_i}$ operatörü bir derivasyondur. Bunu göstermek için yukardaki özelliklerden ikincisini sağladığını göstereceğiz; diğerlerini alıştırma olarak bırakalım.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_i}(fg)(p) &= \frac{\partial}{\partial x_i}\left((f \circ h) \cdot (g \circ h)\right)(p') \\
&= f(p)\frac{\partial}{\partial x_i}(g \circ h)(p') + g(p)\frac{\partial}{\partial x_i}(f \circ h)(p') \\
&= f(p)\frac{\partial g}{\partial x_i}(p) + g(p)\frac{\partial}{\partial x_i}f(p)
\end{aligned}$$

Alıştırma 29. *$\frac{\partial}{\partial x_i}$ operatörünün diğer özellikleri sağladığını gösterin.*

□

Buna ek olarak $(x_i)_{i=1,\ldots,n}$ ve $(y_j)_{j=1,\ldots,n}$, p çevresinde iki ayrı parametrizasyon olsun. p çevresinde her q noktası için

$$\frac{\partial f}{\partial y_j}(q) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(q)\frac{\partial x_i}{\partial y_j}$$

olduğundan $\frac{\partial}{\partial y_j} = \sum_i \frac{\partial x_i}{\partial y_j}\frac{\partial}{\partial x_i}$ buluruz yani $\frac{\partial}{\partial y_j}$ derivasyonu, $\frac{\partial}{\partial x_i}$ derivasyonlarının doğrusal birleşimi olarak yazılabiliyor. İddiamız, p'deki tüm derivasyonlar için bunun doğru olduğu:

Teorem 22. *Bir p noktasındaki derivasyonlar uzayı $\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\right\}_{i=1,\ldots,n}$ ile gerilir.*

Kanıt. Bunun için önce şu alıştırmaya ihtiyacımız var:

Alıştırma 30. *$c : M \to \mathbb{R}$ her noktayı c'ye götüren sabit fonksiyon olsun. M üstünde herhangi bir derivasyon için $l(c) = 0$ olduğunu gösterin.*

$f \in C^\infty(M,p)$ ve c her noktayı $f(p)$'ye götüren sabit fonksiyon, $r = f - c \in C^\infty(M,p)$ olsun. Yukarıdaki alıştırmayı ve sonra Alıştırma 22'yi kullanarak, p yakınında

$$\begin{aligned} l(f) = \quad l(r) &= l\left((x_1-p_1)g_1 + \ldots + (x_n-p_n)g_n\right) \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^n l((x_i-p_i)g_i) \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^n g_i l(x_i-p_i) + (x_i-p_i)l(g_i) \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^n g_i l(x_i) + (x_i-p_i)l(g_i) \end{aligned}$$

buluruz. $\frac{\partial r}{\partial x_i}(p) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = g_i(p)$ olduğuna göre, yukarıdaki toplama $x = p$ noktasında bakarsak

$$l(f)(p) = \sum_{i=1}^n g_i l(x_i)(p) = \sum l(x_i)(p)\frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$$

elde ederiz. Bu eşitlik herhangi bir f için doğru olduğundan

$$l = \sum_{i=1}^n l(x_i)(p)\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p$$

sonucuna varırız. □

Burda durup bir noktayı anlamakta yarar var. Bir manifoldun teğet demetini her noktasındaki teğet uzayların birleşimi olarak ifade ettik. Bu teğet uzayları herbir nokta üstündeki teğet vektörlerin gerdiği uzaylar. İki farklı noktaya iliştirdiğimiz teğet uzaylar birbirinden ayrık. Yani örneğin ayrı noktaların teğet uzaylarından alınan teğet vektörler arasında bir toplama işlemi tanımlı değil. Dolayısıyla teğet demetinin farklı noktaları üzerindeki teğet vektörlerini birbiriyle doğrudan ilişkilendiremezsiniz. Bu ilişkiyi kuran şey teğet demetinin manifold yapısıdır.

Alıştırma 31. *M boyutu n olan pürüzsüz bir manifoldsa, TM'nin $2n$ boyutlu pürüzsüz bir manifold olacağını, TM'ye yamalar döşeyerek gösterin.*

Alıştırma 32. *TS^1 hangi tanıdık manifolda homeomorf?*