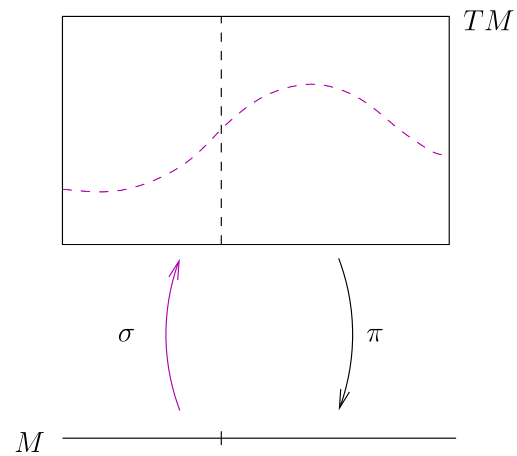
Ders 8: Gradyanımsı vektör alanları

Amacımız gıcır bir vektör alnını ve bir Morse fonsiyonuyla ilişkili gradyanımsı vektör alanlarını kurmak. İzlenebilecek kaynakla [Mil2] ve [Mats].

8.1 Arakesit ve vektör alanı

Önce arakesitleri ve onlar yoluyla manifoldlar üstündeki vektör alanlarını tanımlayacağız. $\pi : TM \to M$, $T_pM \to \{p\}$ şeklinde çalışan izdüşüm gönderimini düşünelim.

Tanım 16. *Eğer gıcır bir $\sigma : M \to TM$ gönderimi $\pi \circ \sigma = \mathbf{1}_M$ eşitliğini sağlıyorsa, σ gönderimine bir* arakesit *denir. Yani aslında bir arakesit, herbir $p \in M$ için T_pM'den türevli bir biçimde birer vektör seçmeye denk gelir. Bu yüzden gıcır bir arakesit aynı zamanda* gıcır bir vektör alanı *demektir (Şekil 13).*



Şekil 13:

Şimdi, T_pM'de $h = (x_i)$ parametrizasyonuna göre bir vektör $u = \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p$, $u_i \in \mathbb{R}$ şeklindeydi. Böylece p'nin bir U komşuluğunda bir X vektör alanı, herbir x noktasında

$$X_x = \sum_{i=1}^n u_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

olarak verilecek. Burda artık herbir $u_i : U \to \mathbb{R}$ gıcır bir fonksiyon. Bu gösterimle bir vektör alanı bir operatör oluyor; X alanı x noktasında bir fonksiyon yediğinde

$$X_x(f) = \sum_{i=1}^{n} u_i(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$$

çıkarıyor. Bu da, f'nin x noktasında X yönündeki türevinden başka bir şey değil.

Amacımız manifoldların üzerinde fonksiyonların davranışını çalışmak olduğu için bir fonksiyonun *gradyanını*, inşa ettiğimiz türden bir vektör alanı olarak görmek makul gelebilir. Ama gradyan ancak iç çarpımın tanımlı olduğu manifoldlarda (örneğin $\mathbb{R}^n$'de ya da bir Riemann metriği döşenmiş manifoldlarda) inşa edilebilir. Bunun yerine biz *gradyanımsı* adını vereceğimiz genel bir geometrik gereci kullanacağız.

8.2 Gradyanımsı

Tanım 17. *$f : M \to \mathbb{R}$ bir Morse fonksiyonu, h ise bir parametrizasyon olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlayan bir X vektör alanına f* için gradyanımsı *denir*
(a) f'nin kritik noktalarından uzakta $X(f) > 0$.
(b) Kritik noktalar civarında uygun bir Morse yamasında X, f'nin gradyanına eşit.

Tanımdaki ikinci koşul şunu söylüyor. p_0 bir kritik nokta ve h Morse yamasının parametrizasyonu olmak üzere

$$X = \nabla(f \circ h)(p_0') = \nabla \left(f(p_0) - \sum_{i=1}^{k} x_i^2 + \sum_{j=k+1}^{n} x_j^2 \right) = -\sum_{i=1}^{k} 2x_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j=k+1}^{n} 2x_j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

Böylece $X(f) = \sum_{i=1}^{n} 4x_i^2$ olacak. Görüldüğü üzere kritik noktalardan uzakta olduğu kadar yakınlarında da gradyanımsı vektör alanı yönünde f'nin türevi her zaman pozitif olacak. Yani gradyan vektör alanında olduğu gibi eğer manifold üzerinde gradyanımsı vektör alanı yönünde hareket edersek fonksiyonun değeri her zaman artacak.

Teorem 23. *Her tıkız, kenarsız, pürüzsüz manifold M ve gıcır $f : M \to \mathbb{R}$ için gradyanımsı bir vektör alanı bulunur.*

Kanıt. Burda yapacağımız kanıt da Teorem 20'nin kanıtına benzeyecek. Bu sefer açık komşuluklarda tanımladığımız gradyanımsı vektör alanlarını birbirine dikeceğiz.

Manifold üzerine öyle bir sonlu $\{U_i\}_{i=1,\dots,n}$açık örtüsü inşa edeceğiz ki
(a) $K_i \subset U_i$ tıkız olmak üzere $\cup K_i = M$ olacak (Önsav 18);
(b) Herbir U_i bir koordinat yaması olacak (U_i'deki koordinat fonsiyonları $(X_1^i, \dots, X_n^i)$ olsun);
(c) Her kritik nokta biricik bir U_i'de olacak.

Herbir i için M'de bir X^i vektör alanını şöyle tanımlayalım:

$$X_p^i = \begin{cases} \phi_i(p)\nabla f(p), & p \in U_i \\ 0, & p \notin U_i \end{cases}$$

Burda $\phi_i$ler daha önce Teorem 20'de kullandığımız fonksiyonlar (Şekil 11). Şimdi

$$X = \sum_{i=1}^{n} X^i : M \to TM$$

vektör alanı tam istediğimiz tür bir alan. X her yerde tanımlı. X herbir kritik noktanın bir Morse komşuluğunda f'nin bir gradyanına eşit. X'in gradyanımsı olduğunu görmek için şu hesabı yapmak yetecek:

$$X(f) = \sum(\phi_i X_i)(f) = \sum \phi_i \nabla f(f) = \sum \phi_i |\nabla f|^2 > 0.$$

□

Alıştırma 33. $h : S^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto z$ *yükseklik fonksiyonu için* $\nabla h = (0, 0, 1)$ *gradyan vektör alanının teğet demete izdüşümünün gradyanımsı olduğunu gösterin.*