Ders 9: Akış eğrileri ve akış difeomorfileri

Bu derste bir vektör alanının *integrali* olan akış eğrilerini ve bunlar aracılığıyla tarif edilen akış difeomorfilerini inceleyeceğiz. Bir ödül olarak, Ders 3'te kanıtsız bıraktığımız bir teoremi sonunda kanıtlayabileceğiz. Bu dersin içeriği her ne kadar standart olsa da, mükemmel bir kaynak için Arnold'un kitabına bakın [Arno].

Tanım 18. *$X : M \to TM$ bir vektör alanı, $\gamma : I \to M$, $I \subset \mathbb{R}$ açık aralık, $t_0 \in I$ olmak üzere,*
(a) $D\gamma(t)(1) = X(\gamma(t))$, her $t \in I$,
(b) $\gamma(t_0) = p_0 \in M$,
eşitliklerini sağlayan γ'ya X'in p_0'dan geçen akış eğrisi *diyoruz.*

(a) ve (b) eşitlikleri aslında manifoldun p_0 noktasında bir ilk koşulu olan bir diferansiyel denklem sistemini tarif ediyor. Şimdi böyle bir diferansiyel sisteme alışmak için görmeye alışık olduğumuz kimi denklemlerden örnekler vereceğiz.

Örnek 1: $y : I \to \mathbb{R}$, $\dfrac{dy}{dx} = -y^2$, sistemi tanıdık dilde ifade edilmiş. Bunu yeni dilimize çevirelim. Dy gönderiminin I'daki teğet vektörleri, karşıdaki teğet uzayın vektörlerine götürdüğünü ve teğet uzayların $\frac{\partial}{\partial x}$ ve $\frac{\partial}{\partial y}$'lerle gerildiğini hatırlayarak sistemi şöyle de yazabiliriz:

$$Dy\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\bigg|_x = \frac{dy}{dx}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\bigg|_x = -y^2\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\bigg|_{y(t)}.$$

Üstelik $\gamma(t) = y(x)$ yazarak ve $\mathbb{R}$ üstünde $X = -y^2\frac{\partial}{\partial y}$ vektör alanını alarak bu sistemi

$$D\gamma(t) = X(\gamma)(t)$$

biçimine getiririz. Bu sistemi çözelim:

$$y \neq 0 : -\frac{dy}{y^2} = dx \Rightarrow \frac{1}{y} = x + c \Rightarrow y(x) = \frac{1}{x+c}(x \neq -c).$$

Görüyoruz ki herbir başlangıç koşulu için biricik akış eğrisi var. Ayrıca bu akış eğrisi bütün $\mathbb{R}$'ye genişletilemez çünkü $x = -c$ olduğu durumlarda y tanımlı değil.

Örnek 2: $\dfrac{dy}{dx} = y^{2/3}$ sistemini alalım. Yani yeni gereçlerimizle

$$Dy(t) = X(y) = y^{2/3}\frac{\partial}{\partial y}.$$

Bu sistemin genel çözümü $y = \pm x^3/27$ çıkıyor. X vektör alanı $y = 0$ noktasında gıcır olmadığı için biricik çözüm yok.

Şimdi bu gözlemlerimizi, adi diferansiyel denklemler kuramından gelen bilgilerle destekleyelim. Önce çözümlerin varlığı ve tekliği:

Teorem 24. *M üzerinde C^1 bir X vektör alanı ve $\frac{d\gamma}{dt} = X(\gamma(t))$ denklemi verilsin. Herhangi $p_0 \in M$ için p_0'ı içeren açık bir $U \subset M$, bir $\epsilon > 0$ ve C^1 bir*

$$\phi : U \times (-\epsilon, \epsilon) \to M$$

vardır ki

$$\phi^{p_0} : (-\epsilon, \epsilon) \to M, \;\; t \mapsto \phi(p_0, t)$$

gönderimi $\gamma(0) = p_0$ başlangıç koşulu için diferansiyel denklemin biricik çözümünü verir.

ϕ^p gönderimi, verilen bir t zamanı sonra vektör alanı boyunca p noktasının hangi noktaya *aktığını* hesaplıyor. ϕ'den üretilmiş başka bir gönderimi de şöyle tanımlayalım:

$$\phi_t : U \to M, \;\; p \mapsto \phi(p, t)$$

Bu gönderim de U'nun verilen herbir noktasının vektör alanı boyunca sabit t süre sonra nereye aktığını hesaplıyor.

Teorem 25. *Herbir izin verilen t için ϕ_t gönderimi görüntüsüne difeomorfidir.*

Bu yüzden ϕ_t gönderimlerine *akış difeomorfisi* diyoruz. Bunlar, tanımlı oldukları kümeyi değişen t ile M içinde gezdiriyor ve bunu difoemorf bir biçimde yapıyor.

Kanıt. Kanıtı $M = \mathbb{R}^n$ için yapalım. $\phi : U \times (-\epsilon, \epsilon) \to R^n$ gönderimi, verilen bir $a \in U$ ve $t_0 \in (-\epsilon, \epsilon)$ için

$$\begin{cases} \dfrac{d\phi(a,t)}{dt} = X(\phi(a,t)) \\ \phi(a,0) = a \end{cases} \qquad (*)$$

ilk koşullu sistemin tek çözümüydü. $s, t, s+t \in (-\epsilon, \epsilon)$ olmak üzere $\phi(p, s+t)$ ve $\phi(\phi(p,s),t)$ gönderimlerine bakalım. $\phi(p, s+0) = \phi(p,s) = \phi(\phi_s(p), 0)$ olduğuna göre ve sistemin çözümü $a = \phi(p,s)$ için tek olduğundan,

$$\phi(p, s+t) = \phi(\phi_s(p), t)$$

olmalı, yani daha güzel ifade edersek,

$$\phi_{s+t}(p) = \phi_t(\phi_s(p)) = \phi_t \circ \phi_s(p)$$

bulmuş olduk. s yerine $-t$ koyarsak $\mathrm{br}_U = \phi_t \circ \phi_{-t}$ elde ederiz. Dolayısıyla her $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ için ϕ_t bir difeomorfiymiş, tersi de ϕ_{-t} imiş. □

Yukarıdaki iki örnekte de bulduğumuz akış eğrileri zamanın belli değerlerinde çalışıyordu; çözümler zamanın tüm değerleri için akıtılamıyordu. Şimdi bunu konu alan güçlü bir teoreme bakalım:

Teorem 26. *Eğer X'in sıfırdan farklı olduğu yerler (X'in* ev*) tıkız bir kümenin içindeyse (örneğin M tıkızsa) Tüm $p \in M$ ve tüm $t \in \mathbb{R}$ için yukarıdaki (*) denklemine $\phi : M \times \mathbb{R} \to M$ çözümü bulunabilir.*

Kanıt. Bir önceki teoremin kanıtındaki U komşuluklarının sonlu tanesi $\{U_i\}$'leri $\mathrm{ev}(X)$'i kaplayacak biçimde seçebiliriz. U_i'lerde çalışan akış difeomorfilerini ϕ_i olarak gösterelim. ϕ_i'lerin tanımlı oldukları ortak zaman aralığı $(-\epsilon, \epsilon)$ olsun. Şimdi

$$\phi : M \times (-\epsilon, \epsilon) \to M, \quad (p,t) \mapsto \begin{cases} \phi_i(p,t), & p \in U_i \\ p, & p \notin \cup U_i \end{cases}$$

gönderimine bakalım. Bu gönderim iyi tanımlı, çünkü $p \in U_i \cap U_j$ olsa bile çözümün tekliğinden $\phi_i(p,t) = \phi_j(p,t)$ olacak. Son olarak aşağıdaki gibi tanımlayacağımız $\hat{\phi}$ işi bitirecek:

$$\hat{\phi} : M \times \mathbb{R} \to M, \quad (p,t) \mapsto \phi_r \circ \phi_{\epsilon/2} \circ \ldots \circ \phi_{\epsilon/2}(p).$$

Burda $\phi_{\epsilon/2}$, k kez yineleniyor ve $r = t - k\epsilon/2$. □

Bu dersi Morse kuramı için bir meyve toplayarak bitiriyoruz.

Teorem 11'in kanıtı. X, f için gradyanımsı bir vektör alanı olsun. $f^{-1}([a,b])$ kümesinde $X(f)$ hiçbir noktada sıfır olamayacağından bu kümede $Y = \frac{1}{X(f)}$

diye yeni bir alan tanımlayabiliriz. γ eğrisi, Y alanının bir $p_0 \in f^{-1}(a)$ noktasından geçen akış eğrisi olsun. O zaman

$$\begin{array}{rcl}
\frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t) & = & D_f(\gamma(t)) \circ \frac{d\gamma}{dt}(t) \\
\gamma = (x_1, \ldots, x_n) \rightsquigarrow & = & \sum_{i=1}^n \frac{df}{dx_i} \frac{dx_i}{dt} \\
 & = & \left(\sum_{i=1}^n \frac{dx_i}{dt} \frac{d}{dx_i} \right)(f) \\
 & = & \left(\frac{d\gamma}{dt}(t) \right)(f) = Y(\gamma(t))(f) \\
 & = & \frac{1}{X(f)} X(f) \Big|_{\gamma(t)} \\
 & = & 1
\end{array}$$

bulunur; yani f'in herhangi bir akış eğrisi yönündeki *hızı* sabit ve 1 imiş. Dolayısıyla ϕ_{b-a}, $f^{-1}(a)$ kümesini $f^{-1}(b)$ kümesine 1-1 örten biçimde götürür. Türevli topoloji, $f^{-1}(a)$ kümesinin M içinde bir altmanifold olduğunu söylüyor [Mil1]. O zaman $f^{-1}(a) \times [0, b-a]$ kenarlı, pürüzsüz bir altmanifolddur ve

$$\psi : f^{-1}(a) \times [0, b-a] \to f^{-1}([a, b]), \quad (x, t) \mapsto \phi_t(x)$$

gönderimi teoremde istenilen difeomorfi olacaktır. □