

Yerel olarak Öklit uzaylarına benzeyen özel topolojik uzaylar olan manifoldlar, bir geometricinin doğal çalışma uzaylarından biri. Bir manifoldda çalışmanın \mathbb{R}^n 'de çalışmaktan farkı, manifoldun yerel olmayan kimi özelliklerinin hesaplara girebilmesi. Dolayısıyla doğal bir merak, bir manifoldun topolojik ya da türevli topolojik yapısını ayırtma gereçleri. Bu konuda M. Morse¹ ile başlayan modern fikirlerden biri şöyle: manifoldun üzerine bir yükseklik fonksiyonu koyuyoruz. Bu fonksiyonun olağan noktaları çevresinde çok fazla bilgi yok. Ama kritik noktaları çevresinde olabilir. Bu kritik noktaları *ehlileştirebilirsek*, fonksiyonun bu noktalar çevresindeki davranışından manifoldun özelliklerine ilişkin bilgi çıkarabiliriz. Nitekim, manifoldda reel değerli bir Morse fonksiyonu, manifoldun topolojisi hakkında *her şeyi* söyleyecek.

Derse, türev deneni nesneye geometri gözlüğüyle bakarak başlıyoruz. Sonra türevli manifold ve üstünde türev alma hakkında konuşuyoruz. Bir fonksiyonun türevini alabilir, kritik noktalarına ve bunların indislerine bakabilir hale geliyoruz. Ders 3-5'te kritik noktalar çevresinde *iyi* davranmayı koşullara bağlayan Morse Önsavı'nı kanıtıyoruz. Ders 6, herhangi bir fonksiyonu istenildiği kadar küçük bir dürtmeyle bu iyi davranan Morse fonksiyonlarından biri haline getirebileceğimizi gösteriyor. Bir Morse fonksiyonunun manifoldun topolojisine ilişkin ne söylediğini anlayabilmek için Ders 7'de türevli bir manifoldun teğet demetini, bu nesneyi kullanarak Ders 8'de vektör alanlarını, Ders 9'da bunların integrallerini (akış eğrilerini) tanıyoruz. Bir Morse fonksiyonu bir manifoldu kulplara ayırıyor. Son iki ders bunu anlamaya çalışıyoruz. Dersin sınırları elverdiğince örneklerle bakıyoruz.

Bu ders notları Ferit Öztürk'ün Matematik Köyünde verdiği iki haftalık bir dersin ardından, dersi izleyen Sina Türelî'nin notları yazmaya başlamasıyla ortaya çıktı. İki haftalık bu dersin amacı temel topoloji ve analiz bilgisine sahip lisans öğrencisini Morse kuramıyla tanıştırmaktı. Ders 12 gün sürdü. Bu notlar da 12 bölümden oluşuyor. Derste Morse kuramın temellerini vermeyi hedefledik ama yol boyunca birçok farklı cebirsel, geometrik gereç kullanıldığından bu gereçlerin çoğunu inşa etmek için yan yollara girdik çıktık.

Birkaç ana kaynağımız var. Türevli topoloji konusunda Milnor [Mil1], Guillemin-Polack [GiPo] ve Hirsch [Hirs], temel topolojide Munkres [Munk], manifoldlar konusunda Spivak [Spi1] ve [Spi2] sonlara doğru bir miktar cebirsel topolojide Hatcher [Hatc] ve tabii ki Morse kuramında Matsumoto [Mats] ve Milnor [Mil2]. Son derslerde hızla geçtiğimiz konuların izinden

¹Marston Morse, ABD'li matematikçi, 1892-1977

düşük boyutlu topolojiye doğru kaymak isteyenler için o konuları derinlemesine çalışan bir kitap da Gompf-Stipsicz [GoSt]. Derslerin belki başında gerekli kaynakları anacağız. Sık sık referans vermeyeceğiz ama bilinmeli ki anlatılanların yukarıdaki listede mutlaka bir kaynağı var.

Bu metnin bir ders kitabı değil ders notu olduğu unutulmamalı. Dolayısıyla okuyucuyu aktif okumaya ve düşünmeye yönlendirmeye çalıştık. Derslerin akışı sırasında ortaya çıkan teknik boşlukları ve kenarda kalmış soruları alıştırmalar olarak bıraktık. Matematik Köyünde dersi izleyenler, gece yarısı problem saatleri yaptı, birlikte bu soruları çözdü. Çözümlerden bazılarını notların sonuna ekledik.

Tüm bunlarla birlikte bu notlar, lisans düzeyinde ya da erken yüksek lisans düzeyinde bir manifold, bir türevli topoloji ya da bir Morse kuramı dersinin -kaynağı olmasa da- rehberi olabilir.

Bu derslerin verilmesi sırasında sınıfta dersi dikkatle dinleyen, sorular soran ve yanlışları düzelten katılımcılar olmasa bu notlar ortaya çıkamazdı. Elbette bu ders notları gelişmeye ve düzeltilmeye açık. Bunları kullanırken karşılaştığımız hataları iletmeniz notların kalitesini yükseltecektir.

Sina Türel, Ferit Öztürk